Tilstandsstrukturer og insidens

Morten Rognes

2008

(Arbeidsutkast)

§1 Innledning

Dette arbeidet dreier seg om det vi her har tillatt oss å kalle tilstandstrukturer.[1] En tilstandsstruktur M er intet annet enn et firetuple <I,T,Q,h> der de tre første komponentene I,T,Q er ikke-tomme mengder og hvor den fjerde komponenten, h, er en funksjon som avbilder I inn i mengden Q^T[2]. Når det gjelder tilstandsstrukturer stiller vi ingen andre krav enn dette. I noen tilstandsstrukturer kan selvfølgelig funksjonen h avbilde I en-entydig på Q^T. Dette er imidlertid ikke et krav som er lagt inn i selve definisjonen. Er M= <I,T,Q,h> en tilstandsstruktur kaller vi I for mengden av mulige verdener i strukturen. T kalles for mengden av tidspunkter i strukturen M, og Q kalles for mengden av totaltilstander i M. Funksjonen h: I → Q^T kalles for distribusjonsfunksjonen assosiert med M. De enkelte funksjonene i Q^T kalles for totalprosessene assosiert med M, og er w et element i I skal vi tillate oss å kalle h(w) for den totalprosessen som foreligger realisert i verdenen w i strukturen M. De uttrykksmåtene som her er innført er naturligvis ren terminologi. Terminologien er imidlertid suggestiv og antyder at begrepet tilstandsstruktur slik det er definert her ikke er uten en viss relevans for problemstillinger som oppstår i modallogikken og spesielt den teorien vi tidligere har utarbeidet om presise deskriptive utsagn.

Hovedhensikten med dette arbeidet er utelukkende å få frem noen viktige trekk ved selve begrepet tilstandsstruktur. Vi er hovedsakelig ikke interessert i annet enn å få en bedre forståelse for begrepet. De satsene vi beviser har neppe noen dypere interesse for filosofer. De er ment for dem som fascineres av det begrepet vi har innført og er interessert i å tilegne seg en dypere innsikt i det.

I §5 skal vi gi en mer dyptgående omtale av begrepet før vi i de resterende paragrafer presenterer og beviser de resultatene vi har kommet frem til.

I resten av denne innledningen skal vi bare kortfattet gjøre rede for innholdet i dette arbeidet.

Når det gjelder §2 til §4 dreier disse avsnittene seg om ekvivalensrelasjoner og det vi kaller partisjoner. Innholdet i disse pragrafene er av en elementær natur. Man kan derfor spørre om ikke disse avsnittene strengt tatt kunne sløyfes. Vi har valgt å ta dem med fordi begrepet ekvivalensrelasjon og begrepet partisjon av en mengde spiller en vesentlig rolle i en god del av de satsene som vi beviser på et senere stadium. Det er derfor viktig å fiksere disse begrepene og gjøre rede for de viktigste satsene om dem som vi har bruk for.

Enhver vet hva en ekvivalensrelasjon er. Det er også velkjent at enhver ekvivalensrelasjon over en mengde X deler opp denne mengden i et system av delmengder der alle delmengdene er ikke-tomme, gjensidig disjunkte, mengder som samlet uttømmer X. De enkelte delmengder i dette system kalles ekvivalensklasser. Uttrykket "partisjon" er muligens mindre velkjent. Med en partisjon av en mengde X forstår vi her en mengde av delmengder Y av X der elementene i Y oppfyller de følgende krav: Elementene skal være ikke-tomme og gjensidig disjunkte, eksklusive. Dessuten skal unionen, foreningsmengden av

---

[1] Det meste av dette arbeidet står for forfatterens egen regning. Men det begrep tilstandsstruktur jeg her arbeider med er relatert til ideer man finner i von Wright [1] og von Wright [2]. Dessuten er begrepet relatert til det Chellas har å si om semantikken til historisk nødvendighet. Man bør konsultere Chellas [1], side 81 - 83. Ellers er dette arbeidet relatert til det jeg skriver om i Rognes [1] - [3].

[2] Det bør bemerkes at dersom A og B er mengder betegner A^B mengden av alle funksjoner der domenet til funksjonen er identisk med A og verdiområdet til funksjonen er inkludert i B.

alle elementene i Y være identisk med mengden X.

I §2 definerer vi begrepet ekvivalensrelasjon og begrepet partisjon presist. I §3 formulerer vi, og kommenterer, en rekke satser som angir detaljert en rekke viktige sammenhenger mellom ekvivalensrelasjoner og partisjoner. Et hovedpoeng er at ekvivalensrelasjoner og partisjoner i en viss forstand er ekvivalente. Enhver ekvivalensrelasjon over en mengde X bestemmer entydig en partisjon av den samme mengde, og enhver partisjon av en mengde X bestemmer entydig en ekvivalensrelasjon over denne mengden. I §4 gir vi detaljerte bevis for disse satsene.

I den neste paragrafen, §5, gir vi en langt mer utførlig redegjørelse for begrepet tilstandsstruktur enn det vi har gjort ovenfor. Dernest går vi i §6 over til å introdusere et annet viktig begrep, nemlig begrepet 'insidens-struktur'. En insidensstruktur M er et tuple <I,T,E> som oppfyller de følgende to krav: (i) I,T er to ikke-tomme mengder. De kalles henholdvis for mengden av de mulige verdenene og mengden av tidspunktene i strukturen M. (ii) E er en funksjon som til ethvert element têT tilordner dette en ekvivalensrelasjon E;t over I. Dette er alt som kreves for at M skal kunne kalles en insidensstruktur.

Er w;1 og w;2 to mulige verdener i strukturen, og har vi at <w;1,w;2>êE;t for noe tidspunkt t, sier vi at de to verdenene w;1 og w;2 er insidente, eller sammenfallende, ved tidspunktet t. Er X en mengde av tidspunkter i strukturen, og er verdenene w;1 og w;2 insidente ved alle tidspunkter i X sies de å være historisk identiske i tidsområde X.

I det neste avsnittet, §7, viser vi hvordan man til en vilkårlig tilstandstruktur M entydig kan tilordne en insidensstruktur som vi kaller den naturlige insidensstrukturen assosiert med M. Omvendt viser vi hvordan man til enhver insidensstruktur H kan entydig tilordne en bestemt tilstandsstruktur, den naturlige tilstandsstrukturen assosiert med insidensstrukturen H. Spesielt det første av disse to begrepene er viktig fordi det gjør det mulig å definere ekvivalen mellom tilstandsstrukturer på en naturlig måte: To tilstandsstrukturer M;1 og M;2 kalles for ekvivalente hvis og bare hvis den naturlige insisdensstrukturen assosiert med M;1 er identisk med den naturlige insidensstrukturen assosiert med M;2.

I en tilstandsstruktur vil det ved ethvert tidspunkt t være en mengde av totaltilstander som logisk sett er realiserbare ved tidspunktet t. Hvis det er logisk mulig å enummerere totaltilstandene i en tilstandsstruktur slik at man for ethvert tidspunkt t har at de logisk sett realiserbare totaltilstandene ved t utgjør et begynnelsessegment av denne enumereringen kalles tilstandsstrukturen for *normalisert*. Det er mulig å vise at enhver tilstandsstruktur er ekvivalent med en tilstandsstruktur som er normalisert i denne forstand. Det bør understrekes at dette er et hovedresultat i dette skrift. Satsen, og beviset for den, er hovedinnholdet i §8 og §9.

Vi gir også bevis for et annet representasjonsteorem av en mer overfladisk natur. En tilstandsstruktur kalles for *sterkt differensiert* hvis og bare hvis mengden av alle de totaltilstandene som logisk sett er realiserbare ved et vilkårlig tidspunkt t ikke har felles medlemmer med mengden av alle de logisk sett realiserbare tilstandene ved et hvilket som helst annet tidspunkt t'. I §11 viser vi at enhver tilstandsstruktur er ekvivalent med en som er sterkt differensiert.

I den neste paragrafen formulerer og beviser vi en del satser som angir nødvendige og tilstrekkelige betingelser for at distribusjonsfunksjonen i en tilstandsstruktur skal avbilde de mulige verdenene i strukturen en-entydig og på mengden av mulige totalprosesser. Vi tar også for oss, og gir bevis for, en rekke andre satser med et besektet, men litt annet, innhold.

I §13 viser vi hvordan visse utsagnsmengder kan assosieres med en tilstandsstruktur. Mer generelt viser vi hvordan en partisjon av mengden av alle mulige verdener i en

tilstandsstruktur bestemmer en helt bestemt mengde med utsagn. Vi definerer også hva som menes med at en utsagnsmengde er strengt uavhengig. Hovedresultatet i dette avsnittet er en sats som sier at dersom M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur og π er en partisjon av mengden av tidspunktene T så vil verdiområdet til enhver funksjon som til ethvert tidsområde xêπ plukker ut et utsagn som beskriver verdensforløpet i dette området x, utgjøre en strengt uavhengig utsagnsmengde hvis distribusjonsfunksjonen h er slik at

h: I -(1-1,på) → X/têT/(S;t).

Her betegner S;t mengden av alle de logisk sett realiserbare totaltilstandene ved tidspunktet t. Merk at dersom F er en funksjon som tilordner ethvert element i a en mengde betegner X/xêa/(F(x)) kryssproduktet av de diverse F(x) ettersom x gjennomløper a. I §13 beviser vi også en en rekke hjelpesetninger som forenkler beviset for denne sats.

Endelig inneholder §14 en kort oppsummering og noen avsluttende bemerkninger om det som har blitt utført og det som har blitt oppnådd i dette arbeid.

§2 Ekvivalensrelasjoner og partisjoner

I denne paragrafen skal vi presist definere begrepet 'ekvivalensrelasjon' og begrepet 'partisjon'. En ekvivalensrelasjon R over en vilkårlig mengde X er en relasjon som er refleksiv over X, symmetrisk og transitiv. Formelt gir vi den følgende definisjon:

Definisjon 2.1 R er en ekvivalensrelasjon over X hvis og bare hvis

(i) X er en mengde og R Inkl XxX
(ii) (Ax)(xêX → <x,x>êR)
(iii) (Ax)(Ay)(x,yêX & <x,y>êR → <y,x>êR)
(iv) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêX & <x,y>êR & <y,z>êR → <x,z>êR)

Er R en ekvivalensrelasjon over X og aêX betegner [a];(R,X) mengden av alle de elementer i X som er R-ekvivalente med a, dvs. mengden Mg(x: xêX & <x,a>êR). Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 2.2 Anta R er en ekvivalensrelasjon over X og at aêX. Da setter vi:
[a];(R,X) = Mg(x: xêX & <x,a>êR)

Vi kaller [a];(R,X) for ekvivalensmengden til elementet a med hensyn på ekvivalensrelasjonen R over X. Når det ikke er noen tvil om hva som er R og X skriver vi "[a]" i stedet for det langt mer klumsete uttrykket "[a];(R,X)". Mengden av alle [a];(R,X) ettersom a gjennomløper X, mengden av alle ekvivalensmengder som bestemmes av R betegner vi med EKv(R,X). Dette uttrykket defineres slik:

Definisjon 2.3 Anta R er en ekvivalensrelasjon over X. Da setter vi:
Ekv(R,X) = Mg([a];(R,X): aêX)

Som nevnt sier vi at en mengde Y er en partisjon av mengden X dersom alle elementene i Y er ikke-tomme delmengder av X som er gjensidig disjunkte og som samlet uttømmer mengden X. Vi bruker "Part(Y,X)" som forkortelse for uttrykket "Y er en partisjon av mengden X" og gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 2.4 Vi sier at Y er en partisjon av X, Part(Y,X), hvis og bare hvis Y er en mengde som oppfyller følgende krav:

(i) Y Inkl Pt(X)
(ii) (Aa)(aêY → a≠ø)
(iii) (Aa)(Ab)(a≠b & a,bêY → aΩb=ø)
(iv) UN(Y) = X

De enkelte elementer i en partisjon av mengden X kan naturligvis under visse omstendigheter oppdeles ytterligere slik at man får en finere partisjon av X. Anta P1 og P2 er to parisjoner av mengden X. Da sier vi at P2 representerer en ytterligere oppdeling av P1 hvis og bare hvis vi har at det for ethvert element a som er med i P2 finnes et element b i P1 som er slik at a er en delmengde av b. Formelt sett kan dette begrepet defineres slik:

Definisjon 2.5 Anta P1 og P2 er partisjoner av mengden X. Da har vi at P2 representerer en ytterligere oppdeling av P1 hvis og bare hvis:

(Aa)(aêP2 → (Eb)(bêP1 & a Inkl b))

Dermed har vi definert de viktigste begrepene vi trenger i forbindelse med ekvivalensrelasjoner og partisjoner.

§3 Noen enkle satser om ekvivalensrelasjoner og partisjoner

Hensikten med denne paragrafen er bare å gi en oversikt over noen viktige satser som gjelder om ekvivalensrelasjoner og partisjoner. Vi har dessuten valgt å ta med satser som kan belyse forholdet mellom disse to typene av mengdeteoretiske størrelser. Grunnen til at vi tar eksplisitt opp disse temmelig elementære satsene her er at vi trenger dem i bevisene for satser som vi senere vil formulere. Det er derfor gunstig å ha dem samlet på ett sted. I neste paragraf skal vi gi bevisene for de satsene vi formulerer her.

Den første satsen vi nevner er denne. Er R en ekvivalensrelasjon over mngden X vil systemet av R-ekvivalensmengder over X utgjøre en partisjon. Dette er naturligvis velkjent. Påstanden kan formuleres eksplisitt slik:

Teorem 3.1 Anta R er en ekvivalensrelasjon over X. Da har man Part(Ekv(R,X),X)

Med enhver ekvivalensrelasjon R kan man altså assosiere en naturlig partisjon, nemlig Ekv(R,X). Gitt på den annen side en partisjon Y av X. da kan man definere en relasjon R over X ved å stipulere at to elementer x,y i X skal stå i denne relasjonen til hverandre hvis og bare hvis de hører til den samme mengden i partisjonen Y. Man kan da lett vise at denne relasjonen R er en ekvivalensrelasjon og dessuten at systemet av ekvivalensmengder som denne relasjonen gir opphav til er identisk med partisjonen Y. Formelt sett kan satsen formuleres slik:

Teorem 3.2 Anta Part(Y,X). Definer relasjonen R ved å sette:
R = Mg(<x,y> : x,yêX & (Ea)(aêY & x,yêa)). Da gjelder:

(i) R er en ekvivalensrelasjon over X
(ii) Ekv(R,X) = Y

Anta nå at R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over X. Da har vi som nevnt ovenfor at

Ekv(R1,X) og Ekv(R2,X) er partisjoner av X. Det man nå kan vise er at dersom man i tillegg antar at den første relasjonen er inkludert i den andre, med andre ord R1 Inkl R2, så vil partisjonen Ekv(R21, representere enn ytterligere oppdeling av partisjonen Ekv(R2,X). Dette er innholdet i det følgende teorem:

Teorem 3.3 Anta R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over X og at R1 Inkl R2. Da har man at Ekv(R1,X) representerer enn ytterligere oppdeling av Ekv(R2,X).

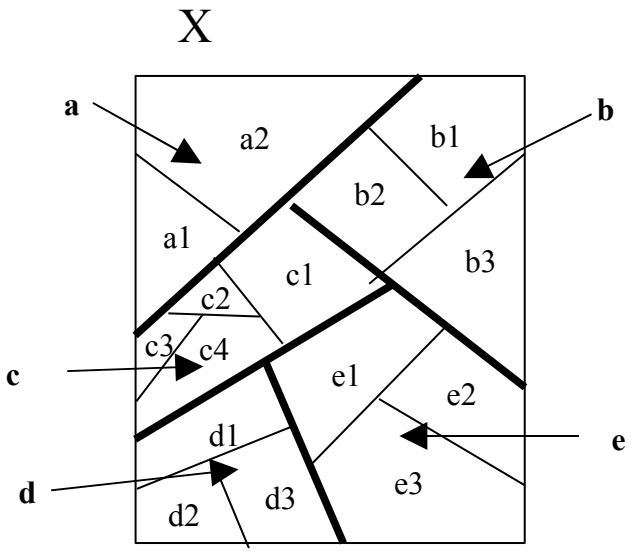
Vi tar også med den følgende sats om partisjoner:

Teorem 3.4 Anta P1 og P2 er partisjoner av X og at P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Da har man for ethvert element aêP2 at Mg(x: xêP1 & x Inkl a) er en partisjon av mengden a

Dessuten har det en viss interesse å nevne den følgende sats:

Teorem 3.5 Anta P1 og P2 er partisjoner av X (X≠ø) og at P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Anta enn mer at P1ΩP2=ø. Da har vi for alle aêP2 at Mg(x: xêP1 & x x Inkl a) inneholder minst to elementer.

Man kan illustrere forholdet mellom to partisjoner P1 og P2 av mengden X der P2 representerer en ytterligere oppdeling av P1 ved det følgende eksempel:



Her mengden X representert ved et rektangel. Dette er indelt i fem hoveddeler, a,b,c,d og e. Man har altså at mengden {a,b,c,d,e} representerer en partisjon P1 av X. Hver og en av disse mengdene a - e er så delt inn i ytterligere delmengder. Man ser for eksempel at a inn i a1 og a2 slik at a=a1U a2. Videre at b er delt inn i b1,b2 og b3 slik at b= b1U b2 U b3. Tilsvarende for mengdene c, d og e. Fra figuren fremgår det at {a1,a2, b1,..,b3,c1,...,c4, d1,..d3,e1,...,e3} utgjør en partisjon P2 av X i den betydning vi har innført. Man ser imidlertid også at for eksempel P3= {a,b,c,d,e1,e2, e3} også representerer en ytterligere oppdeling av P1. Vi har imidlertid at

P1ΩP2 =ø, mens derimot P1ΩP3 = {a,b,c,d} ≠ ø.

Definisjon 3.6 Anta at X er en ikke-tom mengde og at P er en partisjon av X. Da definerer vi ekvivalensrelasjonen over X bestemt av partisjonen P, i symboler "e(P,X)" ved:
e(P,X) = Mg(<x,y>: x,yêX & (Ea)(aêP & x,yêa))

Det er mulig å vise en setning som i en viss forstand er omvendingen av Teorem 3.3

Teorem 3.7 Anta P1 og P2 er partisjoner av mengden X der X≠ø. Anta P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Da har vi at ekvivalensrelasjonen over X bestemt av P1 er inkludert i ekvivalensrelasjonen over X bestemt av P2, med andre ord:
e(P1,X) Inkl e(P2,X)

Den siste satsen vi nevner er denne:

Teorem 3.8 Anta P1 og P2 er partisjoner av mengden X der X≠ø. Anta at P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Under disse omstendigheter har vi at de følgende to betingelser er ekvivalente:
(i) (Aa)(aêP1 → (Eb)(bêP2 & a SInkl b))
(ii) P1 Ω P2 = ø

§4 Bevis for satsene om ekvivalensrelasjoner og partisjoner som ble nevnt i forrige paragraf.

I dette avsnittet skal vi gi detaljerte bevis for de syv satsene vi formulerte i forrige avsnitt. Hvis leseren finner det trettende å gå igjennom utførlige bevis for satser med et såpass elementært innhold som dem vi så langt har presentert er det intet i veien for at vedkommende kan hoppe over det som er skrevet her og gå direkte til §5.

Bevis for Teorem 3.1: Anta at R er en ekvivalensrelasjon over X. Vi skal da vise at Ekv(R,X) er en partisjon av X. Dette innebærer at vi må vise at Ekv(R,X) oppfyller de kravene (i) - (iv) som er nevnt i Definisjon 2.4.

Ad (i): Anta bêEkv(R,X). Da har vi per definisjon at bêMg([a];(R,X): aêX). Dette innebærer at det finnes aêX slik at b= [a];(R,X). Ved hjelp av Definisjon 2.2 følger herav at b= Mg(y: yêX & <y,a>êR). I sin tur følger fra dette: b Inkl X. Dette innebærer at bêPt(X). Siden b var et vilkårlig element i Ekv(R,X) følger at Ekv(R,X) Inkl Pt(X).

Ad (ii): Anta bêEkv(R,X). Da har vi at det finnes aêX slik at b= [a];(R,X) = Mg(y: yêX & <y,a>êR). Dette følger ved hjelp av Definisjon 2.2 og Definisjon 2.3. Nå har vi siden R er en ekvivalensrelasjon over X at (Ax)(xêX → <x,x>êR). Det følger derfor at <a,a>êR og derfor at aêb. Herav har vi naturligvis b≠ø.[

Ad (iii): Anta (1) b,cêEkv(R,X) og at b≠c. Vi skal vise at bΩc =ø. Fra (1) og Definisjonen av Ekv(R,X) følger det at det finnes a1, a2êX slik at
(2) b=[a1];(R,X) & c= [a2];(R,X).
Anta for reduktio at absurdum at (3) bΩc ≠ ø. Da finnes det y slik at (4) yêbΩc. Fra dette og (2) følger: (5) yê[a1];(R,X) & yê[a2];(R,X). Herav har vi ved hjelp av Definisjon 2.2 at
(6) <y,a1>êR & <y,a2>êR, og derfor, siden R er symmetrisk og transitiv:

(7) <a1,a2>êR. Anta for vilkårlig z at zêb = [a1];(R,X). Da har vi <z,a1>êR. Fra dette, (7) og et forhold at R er transitiv følger <z,a2>êR. Men da zê[a2];(R,X) =c. Det følger at b Inkl c. På tilsvarende vis kan man vise at c Inkl b. Vi har derfor at b=c. Dette strider imidlertid mot forutsetningen at b≠c. Det følger at (3) ikke kan holde og derfor at bΩc=ø. Dette viser at det tredje kravet i Definisjon 2.4 holder.

Ad (iv): Det er nødvendig å vise at UN(Ekv(R,X)) = X. Vi viser først inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig z at (1) zêUN(Ekv(R,X)). Da følger at det finnes b slik at: (2) zêb & bêEkv(R,X). Ved hjelp av Definisjon 2.2 og Definisjon 2.3 kan man herav slutte at det finnes aêX slik at (3) b = Mg(y: yêX & <y,a>êR). Siden zêb følger ved hjelp av (3) at zêX. Dette viser at UN(Ekv(R,X)) Inkl X

Anta på den annen side at zêX for vilkårlig z. Fra definisjonen av ekvivalensrelasjon, Definisjon 2.1, har vi da at <z,z>êR. Det følger herav at zêMg(y: yêX & <y,z>êR). Fra dette følger så ved hjelp av Definisjon 2.2 at zê[z];(R,X) & zêX. Herav følger [z];(R,X)êEkv(R,X) = Mg([a];(R,X): aêX). Det må altså finnes b slik at zêb & bêEkv(R,X). Herav har man: zêUN(Ekv(R,X)). Dette viser at Ekv(R,X) oppfyller det fjerde kravet i definisjonen av en partisjon.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Bevis for Teorem 3.2: (a) Anta at Part(Y,X) og la R være definert ved:

(0) R = Mg(<x,y>: x,yêX & (Ea)(aêY & x,yêa))

Vi viser først at R er en ekvivalensrelasjon.

(i) Anta aêX for vilkårlig a. Siden UN(Y) = X følger det at det finnes et element bêY der aêb. Da har man åpenbart a,aêX & (Eb)(bêY & a,aêb). Fra dette samt definisjonen av R følger <a,a>êR. Dette viser at R er refleksiv.

(ii) Anta at x,yêX og at <x,y>êR for vilkårlige x,y. Ved hjelp av (0) følger da: x,yêX & (Ea)(aêY & x,yêa). Herav har vi åpenbart at y,xêY & (Ea)(aêY & y,xêa) og derfor at <y,x>êR. Dette viser at R er symmetrisk.

(iii) Anta x,y,zêX & (1) <x,y>êR og (2) <y,z>êR. Fra (1), (2) og definisjonen av R følger det at det finnes a,b slik at:

(3.1) x,yêX & aêY & x,yêa

(3.2) y,zêX & bêY & y,zêb

Dette innebærer, siden yêa&yêb, at aΩb=ø. Siden Y er en partisjon har vi da ved hjelp av det det tredje punktet i Definisjon 4.3 at a=b. Det følger at x,zêb & bêY & x,zêb. Ved hjelp av (0) har vi da <x,z>êR. Dette viser at R er transitiv.

(b) Det er også nødvendig å vise at Ekv(R,X) = Y. Anta derfor for vilkårlig a at (1) aêEkv(R,X). Ved hjelp av definisjonen av Ekv(R,X) følger det da at det finnes b slik at (2) bêX og (3) a= Mg(y: yêX & <y,b>êR). Siden Y er en partisjon av X og bêX følger det at det finnes d1 slik at (4) bêd1 & d1êY. Dette følger fra den fjerde klausulen i Definisjon 2.4. Det vil nå være nok å vise, for å vise at Ekv(R,X) Inkl Y, at a=d1. Anta derfor for vilkårlig x at (5) xêa. Da har vi ved hjelp av (3) at (6) <x,b>êR & xêX. Fra dette og definisjonen av R følger det at det finnes d2 der (7) d2êY & x,bêd2. Men fra (4) og (7) følger bêd1& bêd2 og derfor at d1Ωd2 ≠ø. Siden d1,d2êY følger det, siden Y er en partisjon at d1=d2. Herav har vi ved hjelp av (7) at xêd1. Men x var et vilkårlig objekt slik at (5). Det følger at x Inkl d1. Anta på den annen side at xêd1. Ved hjelp av (4) har vi da x,bêd1 &d1êY. Siden xêd1 følger xêX. Derfor har vi i lys av definisjonen av R at xêX & <x,b>êR. Det følger at xêa. Dermed har vi også vist at d1 Inkl a. Det følger at a=d1, og siden d1êY at aêY. Vi har nå vist at Ekv(R,X) Inkl Y

Anta på den annen side for vilkårlig a at aêY. Det er nødvendig å vise at aêEkv(R,X).

I lys av definisjonen av Ekv(R,X) innebærer dette at vi må vise at det finnes b der vi har

(8) bêX & a= Mg(y: yêX & <y,b>êR)

Siden aêY har vi fordi Y er en partisjon av X at a er ikke-tom. Det må derfor finnes et eller annet b slik at (9) bêa. Vi skal vise at (8) holder. Anta derfor for vilkårlig x at xêa. Siden aêY har vi da xêa êY og derfor xêUN(Y). Siden Y er en partisjon av X følger UN(Y) =X og derfor xêX. Vi har derfor at x,bêa. Siden aêY har vi enn mer (Ed)(dêY & x,bêd). Fra dette og (0) kan vi slutte xêX & <x,b>êR. Dette viser at inklusjonen mot høyre i (8). Anta på den annen side, for vilkårlig x at xêX & <x,b>êR. I lys av definisjonen av R må det da finnes d slik at

dêY & x,bêd. Siden bêa i henhold til (9) har vi da dΩa≠ø og derfor , siden Y er en partisjon og d,aêY at d=a. Siden xêd følger da xêa. Dette viser inklusjonen mot venstre i (8). Siden bêa og aêY følger at beUN(Y) og derfor at bêX, siden UN(Y)=x når Y er en partisjon.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 3.2. **QED.**

Bevis for Teorem 3.3: Anta at R1 og R2 er to ekvivalensrelasjoner over X og at (1) R1 Inkl R2. Ved hjelp av Teorem 3.1 kan vi da slutte at Ekv(R1,X) og Ekv(R2,X) er partisjoner av mengden X. Vi skal vise at Ekv(R1,X) representerer en ytterligere oppdeling av Ekv(R2,X). Fra Definisjon 2.5 ser man at det vil være tilstrekkelig å bevise:

(2) (Aa)(aêEkv(R1,X) → (Eb)(bêEkv(R2,X) & a Inkl b))

Anta derfor for vilkårlig a at (3) aêEkv(R1,X). Da finnes zêX slik at

(3) a= [z];(R1,X) = Mg(y: yêX & <y,z>êR1). Definer b ved:

(4) b= Mg(y: yêX & <y,z>êR2). Siden zêX kan man da slutte

(5) bêEkv(R2,X). Anta for vilkårlig x at xêa. Det følger da ved hjelp av (3) at xêX & <x,z>êR1. Siden R1 Inkl R2 har vi herav xêX & <x,z>êR2. Herav kan man ved hjelp av (4) slutte: xêb. Siden x var vilkårlig har vi vist a Inkl b. Men fra dette og (5) følger det vi ønsker, nemlig: (Eb)(bêEkv(R2,X) & a Inkl b). **QED.**

Bevis for Teorem 3.4: Anta at P1 og P2 er partisjoner av X og at P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Anta at a er et vilkårlig element i P2. Vi må da vise at Mg(x: xêP1 & x Inkl a) er en partisjon av mengde a. Setter vi Y= Mg(x: xêP1 & x Inkl a) må vi altså vise at Y oppfyller kravene (i) - (iv) i Definisjon 2.4.

Ad (i): Anta xêY for vilkårlig x. Fra definisjonen av Y følger da x Inkl a og derfor xêPt(A). Siden x var vilkårlig har vi altså at Y Inkl Pt(a). Dette viser at Y oppfyller det første kravet.

Ad (ii): Anta xêY for vilkårlig x. Fra definisjonen av Y har vi i så fall xêP1 & x Inkl a. Siden P1 er en partisjon følger det at x≠ø.

Ad (iii): Anta x,yêY & x≠y. Da har vi x,yêP1 i lys av definisjonen av Y og x≠y. Siden P1 er en partisjon av X følger det at xΩy=ø. Det viser at Y også oppfyller det tredje kravet i Definisjon 2.4.

Ad (iv): Vi må vise at UN(Y) = a. Anta for vilkårlig x at xêUN(Y). Da finnes det y slik at xêy & yêY. Siden yêY har vi etter definisjonen av Y at y Inkl a. Det følger at xêa. Dette viser at UN(Y) Inkl a.

Vi må imidlertid også vise inklusjonen den andre veien. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x0 der (1) x0êa og (2) ¬(x0êUN(Y)). Fra (2) følger (3) ¬(Ey)(x0êy & yêY). Herav følger i sin tur, siden Y = Mg(x: xêP1 & x Inkl a) at

(4) ¬(Ey)(x0êy & yêP1 & y Inkl a). Dette impliserer:

(5) (Ay)(x0êy & yêP1 → ¬(y Inkl a))

Nå har vi at aêP2 og derfor siden P2 Inkl Pt(X) at a Inkl X. siden x0 i henhold til (1) er med i

a følger at x0êX. Siden P1 er en partisjon av X og vi derfor har UN(P1)=X følger det at det finnes b slik at (6) bêP1 & x0êb. Fra dette og (5) kan man slutte: (7) ¬(b Inkl a). Dette impliserer at det finnes z0 slik at (8) z0êb & ¬(z0êa). Siden P1 er en ytterligere oppdeling av P2 og bêP1 finnes det c der (9) cêP2 & b Inkl c. Vi har x0êa, og fra (6) og (9) har vi enn mer x0êc. Derfor aΩc≠ø. Men a,cêP2 og siden P2 er en partisjon av X følger det da at (10) a=c. Men fra (9) og (10) følger b Inkl a som åpenbart strider mot (7). Det kan derfor ikke finnes noe x0 slik at (1) og (2) holder. Det følger at a Inkl UN(Y).

Dette avslutter beviset for Teorem 3.4. **QED.**

Bevis for Teorem 3.5: Anta forutsetningene i satsen holder og at P1Ωp2=ø. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes a0êP2 slik at Mg(x: xêP1 & x Inkl a0) kun inneholder et element. Dette innebærer at det finnes c slik at

(1) Mg(x: xêP1 & x Inkl a0) = {c}

Fra forutsetningene i satsen og Teorem 3.4 følger det at Mg(x: xêP1 & x Inkl a0) er en partisjon av a0. Da må vi ha at UN(Mg(x: xêP1 & x Inkl a0)) = a0. Men i lys av (1) impliserer dette at

UN({c})=a0. Men UN({c}) = c. Vi må derfor ha c=a0. Herav har vi ved hjelp av (1) at a0êP1. Men a0êP2. Det følger at P1ΩP2≠ø, noe som strider mot forutsetningen om at P1ΩP2=ø. Dette viser at satsen holder. **QED.**

Bevis for Teorem 3.8: Anta forutsetningene i satsen holder. Det er nødvendig å bevise:

(1) e(P1,X) Inkl e(P2,X)

Anta for vilkårlige x,y at (2) <x,y>ê e(P1,X). Da har vi i lys av definisjonen av e(P,X) at (3) x,yêX & (Ea)(aêP1 & x,yêa). Det må med andre ord finnes noe a der (4) aêP1 & x,yêa. Siden P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2 følger det fra (4), siden aêP1, at det må finnes b slik at (5) bêP2 & a Inkl b. Fra dette og (4) har man (Eb)(bêP2 & x,yêb). Siden x,yêX har vi da ved hjelp av definisjonen av e(P,X) at <x,y>ê e(P2,X). Dette viser at Teorem 3.7 holder. **QED.**

Bevis for Teorem 3.8: Anta forutsetningene i satsen holder. (a) Vi viser først at betingelsen (ii) i satsen impliserer (i). Anta derfor at (1) P1ΩP2=ø. Anta for reduktio ad det finnes a der (2) aêP1 og (3) ¬(Eb)(bêP2 & a SInkl b). Siden P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2 har vi per definisjon:

(4) (Aa)(aêP1 → (Eb)(bêP2 & a Inkl b)) Fra (2) og (4) følger eksistensen av noe b der: (5) bêP2 & a Inkl b. Fra (5) og (3) følger (6) ¬(a SInkl b). Men (5) og (6) impliserer a=b. Fra dette, (2) og (5) kan man konkludere med at aêP1ΩP2. Dette strider imidlertid mot (1). Dette viser at (ii) impliserer (i).

(b) Vi må også vise at beingelsen (i) som er oppført i satsen impliserer betingelsen (ii). Anta derfor (7) (Aa)(aêP1 → (Eb)(bêP2 & a SInkl b)). Anta dessuten for reduktio at P1ΩP2≠ø. Da finnes det c slik at (8) cêP1 og (9) cêP2. Fra (7) og (8) følger at det finnes b slik at (10) bêP2 & c SInkl b. Siden c SInkl b følger at c≠b. Siden c,bêP2 har vi siden P2 er en partisjon av X at (11) cΩb=ø. Men cêP1 og siden P1 er en partisjon må vi ha at c≠ø. Da finnes x slik at xêc. Ved hjelp av (10) kan man da slutte xêcΩb. Men dette strider mot (11). Dette viser at (i) impliserer (ii)

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED.**

§5 En mer utførlig redegjørelse for begrepet tilstandsstruktur.

Med en tilstandsstruktur forstår vi, som vi allerede nevnte i innledningen i dette arbeidet, et fire-tuple M = <I,T,Q,h> der I,T,Q er ikke-tomme mengder og h er en funksjon som avbilder I inn i mengde Q^T. [3] Q^T er, som vi allerede har forklart mengden av alle de funksjoner hvor demenet er T og hvor verdiområdet er inkludert i Q. En tilstandsstruktur er altså ikke noe annet enn et fire-tuple som oppfyller disse kravene. Det kan bemerkes at det i og for seg ikke er noe i denne definisjonen som tilsier at mengdene I,Q og T skal være disjunkte. Det eneste som kreves er at de er ikke-tomme. Som man forstår er altså en tilstandsstruktur en rent mengdeteoretisk struktur på lik linje med gruppestrukturer eller andre rent algebraiske strukturer av forskjellig art.

Er M = <I,T,Q,h> en tilstandsstruktur skal vi av heuristiske grunner kalle I for mengden av de mulige verdenene i strukturen M. T kaller vi for mengden av tidspunktene, og Q kaller vi for mengden av totaltilstandene i M. Endelig kaller vi funksjonen h for distribusjonsfunksjonen i M. De enkelte funksjonene i Q^T skal vi tillate oss å kalle totalprosessene i M. h(w), der wêI, er derfor den totalprosessen som h tilordner verdenen w. Vi skal kalle h(w) for den totalprosessen som foreligger realisert i w. Merk at dette snakket om mulige verdener, tidspunkter, totaltilstander og totalprosesser ikke impliserer at vi nødvendigvis mener at det finnes mulige verdener, tidspunkter eller totaltilstander. En setning av typen "w er en mulig verden i tilstandsstrukturen M" innebærer ikke noe annet enn at M er et fire-tuple som oppfyller de kravene vi har nevnt ovenfor og at w er et element i den ikke-tomme mengden som utgjør den første komponenten i dette firetuplet. Fra dette siste kan man naturligvis ikke slutte at det finnes mulige verdener. Tilsvarende innebærer ikke den åpne setningen "f er en totalprosess i tilstandsstrukturen M" ikke noe annet enn at f er et element i mengden av alle de funksjoner som utgjør den fjerde komponenten i tilstandsstrukturen M. Fra dette skulle det fremgå at det vi har å si om tilstandsstrukturer, mulige verdener, totaltilstander i dette skrift er nøytralt når det gjelder ontologiske spørsmål.

Når det gjelder mengden av tidspunkter i en tilstandsstruktur kan dette være en hvilken som helst mengde. Det foreligger derfor i og for seg ikke noe krav om at mengden av tidspunkter skal være ordnet på en bestemt måte, eller noe krav om at det skal være mulig å snakke om tidsavstanden mellom de enkelte tidspunkter. Men vi har naturligvis i tankene at mengden T kan ha en struktur som det er nærliggende å tenke seg at mengden av tidspunkter faktisk har. I noen tilfelle kan det være naturlig å tenke seg mengden av tidspunkter i en tilstandsstruktur kan representeres ved punktene på den reelle talllinjen. Men dette er ikke noe krav som inngår i den definisjonen vi har gitt ovenfor. De enkelte delmengdene av T i en tilstandsstruktur M= <I,T,Q,h> skal vi kalle for tidsområder i strukturen. Disse tidsområdene kan naturligvis overlappe på alle mulige måter.

Det er i og for seg ikke noe i veien for at mengden av mulige totaltilstander og mengden av tidspunkter i en tilstandsstruktur kan være mengder med en temmelig komplisert struktur. Man kan for eksempel betrakte de tilstandsstrukturer M der Q er (Reell^3)^P[4] hvor P er en ikke-tom mengde med partikler og hvor Reell^3 representerer mengden av punkter i det tredimensjonale evklidske rom. Totaltilstandene i M vil da være funksjoner som tilordner alle de enkelte partiklene i P punkter i rommet. En funksjon fê((Reell^3)^P) vil i så fall gi en fullstendig informasjon om hvor hver partikkel befinner seg. Den vil også gi full informasjon om alle avstandsforholdene mellom partiklene om avstander i det tre-dimensjonale evklidske

---

[3] At f er en funksjon som avbilder X inn i Y innebærer ikke noe annet enn at Func(f) & Dom(f)=X og at Rgn(f) Inkl Y. Har vi at Rgn(f) = Y sier vi at f avbilder X *på* Y.

[4] "Reell" betegner mengden av de reelle tall.

rom defineres på vanlig måte. De enkelte totalprosesser i denne type tilstandsstrukturer vil da angi nøyaktig hvilken romlig partikkeldistribusjon som foreligger ved ethvert tidspunkt. Tenker man seg videre at T= Reell, der T er mengden av tidspunkter i strukturen, vil tiden være lineær og kontinuerlig. De enkelte funksjoner i Q^T vil da representere totalprosesser hvor hver funksjon representerer et mulig bilde av hvordan dette rent partikkel-fysiske univers utvikler seg over tid. Tenker man seg derfor en tilstandsstruktur M;f= <I,T,Q,h> der T = Reell og
Q= ((Reell^3)^P) for en eller annen ikke-tom mengde med partikler P vil h(w) representere den mulige totale partikkelfysiske prosess som foreligger realisert i verdenen w. Er for eksempel x0 en partikkel i P vil man ha (h(w)(t))(x0)ê(Reell^3). Punktet (h(w)(t))(x0) vil derfor være det punktet i det tre-dimensjonale evklidske rom hvor partikkelen x0 befinner seg ved tidspunktet t i verdenen w. I forskjellige verdener vil naturligvis bevegelsesmønsteret til partikkelen x0 være forskjellig. Funksjonene λ/têT/(h(w);t(x)) ettersom x gjennomløper mengden av partikler i P representerer følgelig de forskjellige bevegelsesmønstre til alle partiklene i verdenen w

Partikkelfysiske modeller av denne typen gir naturligvis bare et ytterst forenklet bilde av den fysiske virkelighet. Tenker man seg at distribusjonsfunksjonen h i tilstandsstrukturen ovenfor avbilder I en-entydig på Q^T, dvs. (Reell^3)^T vil naturligvis det partikkelfysiske forløp i noen verdener være fullstendig i strid med de fysiske lover slik vi kjenner dem ved det nåværende tidspunkt. Et mer normalt sett av mekaniske lover vil derfor legge temmelig sterke krav på hvilke av disse verdenene som er fysisk mulige.

Eksemplet ovenfor viser hva slags strukturer som faller inn under det generelle begrepet om en tilstandsstruktur.

Vi skal imidlertid også omtale meget kort og skissemessig et annet eksempel. La π betegne mengden av alle de subjekter som det er logisk mulig at kan ha bevisste opplevelser. Anta videre at E representerer mengden av alle momentane totalopplevelser som det er logisk mulig at kan fremtre for bevisstheten til et eller annet av subjektene i mengden π. Blandt alle disse momentane totalopplevelser skal vi også inkludere en "nullopplevelse". Fremtrer den for bevisstheten til et subjekt innebærer det at subjektet ikke opplever noe i det hele tatt. Kort sagt har det ikke bevissthet om noe som helst. La oss nå betrakte tilstandsstrukturen M;e= <I,T,Q,h> der Q = E^π og tidspunktene i T er representert ved mengden av de reelle tall. De diverse funksjonene i E^π vil da tilordne hvert subjekt en momentan ttotalopplevelse. Ser man på en funksjon f i Q^T vil f(t);x der têT og xêπ representere den momentane logisk mulige totalopplevelsen som fremtrer for bevisstheten til subjektet x ved tidspunktet t. Er x et subjekt i π og betrakter man (h(w);t)(x) vil dette være den totalopplevelsen som fremtrer for bevisstheten til subjektet x ved tidspunktet t i verdenen w. Er t;0 og t;1 to tidspunkter i T, der t;0 kommer før t;1, og [t;0, t;1] tidsintervallet fra og med t;0 til og med t;1 vil λ/tê[t;0,t;1]/(h(w);t(x)) representere den strømmen av momentane totalopplevelser som fremtrer for bevisstheten til subjektet x i tidsintervallet [t;0, t;1] i verdenen w. Formodentlig vil en betraktelig del av totalprosessene i (E^π)^T ikke være logisk sett realiserbare. Distribusjonsfunksjonen h vil derfor neppe være *på* Q^T, dvs. (E^π)^T , bare avbilde I inn i Q^T.

La oss igjen betrakte et subjekt x0êπ. Da vil som nevnt H(w);t(x0) representere den momentane totalopplevelse som fremtrer for bevisstheten til x0 ved tidspunktet t i verdenen w. Det er imidlertid naturlig å tenke seg at individet x0 ikke har noe evig liv og derfor bare har opplevelser i et begrenset tidsavsnitt, la oss si i intervallet [t;0,t;1]. Føt t;0 vil dette individet x0 ikke ha noen opplevelser i verdenen w og etter tidspunktet t;1 vil det kanskje heller ikke ha noen opplevelser. I så tilfelle vil det være naturlig å uttrykke dette ved å sette h(w);t(x0)= *

om t>t;1 og også h(w);t(x0) =* om t<t;0.

Også når det gjelder denne fenomenalistisk betonte tilstandsstrukturen dreier det seg naturligvis om en ytterst forenklet modell, men dem kan, det virker i det minste innlysende på meg, differensieres og utvikles i forskjellige retninger.

Vi har nå utdyppet i noen grad begrepet tilstandsstruktur og i tillegg gitt endel eksempler som kan antyde dets filosofiske relevans. La oss nå vende tilbake til den generelle teorien.

§6 Insidensstrukturer

I dette avsnittet skal vi definere en annen type strukturer som vi skal kalle "insidensstrukturer". Vi bruker dette uttrykket av mangel på et bedre navn. Begrepet fikseres ved hjelp av den følgende definisjon:

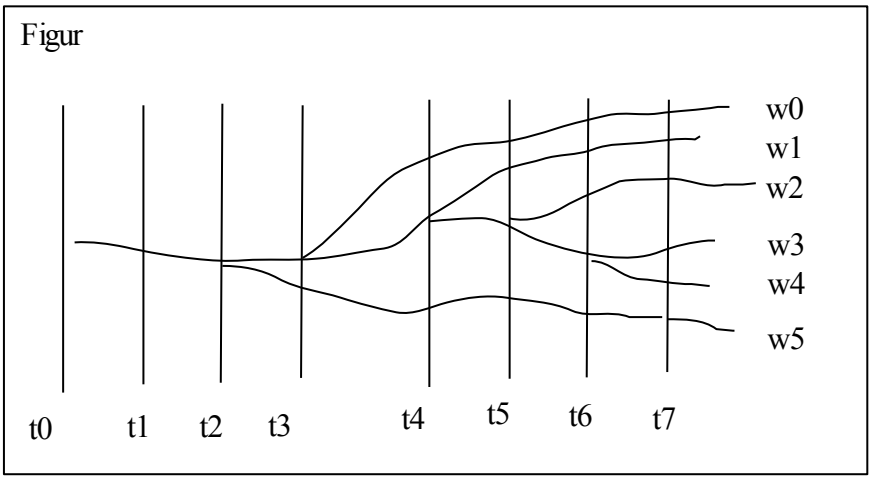
Definisjon 6.1 M er en insidensstruktur hvis og bare hvis M er et triple <I,T,E> der de tre komponentene I,T og E oppfyller de følgende krav:

(i) I og T er ikke-tomme mengder

(ii) E er en funksjon som til ethvert element têT Tilordner t en ekvivalensrelasjon over I

Definert på denne måten er en insisdensstruktur intet annet enn en helt abstrakt mengdeteoretisk struktur. Det er imidlertid tanken at de enkelte elementene i en slik struktur skal representere visse intuitivt meningsfulle størrelser. Er M=<I,T,E> en insisdensstruktur er det hensikten at I representerer mengden av absolutt alle logisk mulige verdener. T representerer mengden av tidspunkter. Er têT og w1, w2 to mulige verdener tenker vi oss at <w1,w2>êE;t holder hvis og bare hvis de to mulige verdenene w1 og w2 faller fullstendig sammen ved tidspunktet t. E;t representerer altså for hvert tidspunkt t, en sammenfalls- eller insidens-relasjon mellom de mulige verdenene. Intuitivt virker det da rimelig å kreve at denne insidensrelasjonen er en ekvivalensrelasjon. Det bør bemerkes at enhver verden naturligvis er insident med seg selv ved ethvert tidspunkt. Naturligvis er det likevel intet som logisk sett forhindrer at det kan finnes et tidspunkt der ingen verden er insident med noen annen verden.

Er a en delmengde av mengden av tidspunkter T kan det hende at to verdener w og w' er insidente ved alle tidspunktene i a. I såfall sier vi at de er historisk identiske i tidsområdet a. Tenker man seg at tidspunktene i T er ordnet i en bestemt rekke følge t;0, t;1, t;2, ... etc kan to verdener falle sammen ved alle tidspunkter opp til et bestemt t;n og aldri falle sammen ved noe tidspunkt som kommer etter dette. Dessuten er det også mulig at to verdener kan være historisk identiske for alle tidspunkter opp til t;j for noe jêN, for deretter å være historisk ikke-sammenfallende for alle tidspunkter opp til t;(j+k), men så falle sammen etter alle disse tidspunktene. Det er altså mulig å tenke seg at mulige verdener kan danne for eksempel en forgrenet trestruktur av den typen som er forsøkt anskueliggjort ved den følgende figuren på neste side. Figuren illustrerer en situasjon der man har at alle de fem verdenene w0 - w5 faller sammen ved tidspunktene t0 - t2. Ved tidspunktet t3 er de fem første verdenene fremdeles insidente, men w5 er ikke insident med noen av de andre. Dette fortsetter frem til t7. t2 er altså et forgreningspunkt. Det samme er t3. Etter t3 er ikke lenger w0 insident med noen av w1 - w4. Også t4 er et forgreningspunkt, siden w1 ikke lenger er insident med noen av w2 - w4 etter dette tidspunkt. På tilsvarende måte ser man at tidspunktene t5 og t6 er forgreningspunkter.



§7 Om sammenhengen mellom tilstandsstrukturer og insidensstrukturer

Hensikten med dette arbeidet, som egentlig er ganske beskjedent, er å utdype sammenhengen mellom de to typene av strukturer som vi så langt har innført. I dette avsnittet, og de følgende avsnitt, skal vi gjøre visse forsøk i denne retning.

Det første vi noterer er at man til enhver tilstandsstruktur M kan konstruere en insidensstruktur M' som på en naturlig måte "svarer til" M. Den følgende svært enkle sats kan bidra til å kaste lys over det vi har i tankene:

Teorem 7.1 Anta M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. For hvert element têT definer en relasjon E;t ved:

E;t= Mg(<w,w'>: h(w);t = h(w');t & w,w'êI) er en insisdensstruktur.

La så E være Mg(<t, E;t>: têT). Da har man at M' = <I,T,E>

Bevis: Det er nødvendig å vise at M' er en insidensstruktur. Det er åpenbart at I og T er ikke-tomme mengder. Dette følger fra forutsetningen om at M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Det eneste vi behøver å vise er at E er en funksjon som tilordner som tilordner ethvert element têT en ekvivalensrelasjon E(t). La oss først vise at E slik den er definert i satsen er en funksjon. Anta for vilkårlige x,y,z at (1) <x,y>êE og (2) <x,z>êE. Fra definisjonen av E følger da at det finnes t,t' slik at

(3) t,t'êT & <x,y>= <t,E;t> & <x,z> = <t', E;t'>

Da følger åpenbart t=x=t' og y=E;t og z= E;t'. Men fra dette har vi åpenbart at y=z. E er derfor en funksjon. Anta nå at t er et vilkårlig element i T. Vi må da vise at E;t er en ekvivalensrelasjon. Vi har i lys av definisjonen gitt i satsen at

E;t= Mg(<w,w'>: h(w);t = h(w');t & w,w'êI)

Man ser imidelrtid lett at E;t definert på denne måten er refleksiv, transitiv og symmetrisk. Dette er så enkelt at man trygt kan overlate til leseren oppgaven med å bevise det. **QED.**

Man ser at den insisdensstrukturen M' som er konstruert i teoremet er entydig gitt straks tilstandsstrukturen M er gitt. Vi skal derfor si at M' er den naturlige insisdensstrukturen assosiert med M. For tydelighetens skyld gir vi den følgende helt formelle definisjon:

Definisjon 7.2 Anta M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Definer for hvert têT, E;t ved: E;t= Mg(<w,w'>: h(w);t = h(w');t & w,w'êI). Sett: E =Mg(<t, E;t>: têT) og M' =<I,T,E>. Da kalles M' for den *naturlige insidenstrukturen assosiert med* M.

Vi kan også gå den motsatte veien, fra insidens strukturer til tilstandsstrukturer. Gitt en insisdensstruktur M kan vi på en naturlig måte definere en korresponderende tilstandsstruktur. Den følgende sats illustrerer konstruksjonsmåten.

Teorem 7.3 Anta M=<I,T,E> er en insidensstruktur. Definer Q ved:
Q= UN(Mg(Ekv(E;t,I): têT)) og sett:
h= λ/wêI/(Mg(<t, Mg(w': <w',w>êE;t)> :têT))
Da er M'= <I,T,Q,h> en tilstandsstruktur.

Bevis: Det er nødvendig å vise at M' oppfyller de kravene som stilles til en tilstandsstruktur. Siden M er en insidensstruktur må åpenbart I og T være ikke-tomme mengder. Vi må imidlertid også vise at Q er ikke-tom. Siden I er ikke-tom finnes et et element (1) w0êI. Siden T etter forutsetningene er ikke-tom finnes et tidspunkt t0 der vi har (2) t0êT. Siden M er en insidensstruktur har vi da at E;(t0) er en ekvivalensrelasjon over I. Fra dette og (1) kan man slutte at <w0,w0>êE;(t0). Dette innebærer at w0ê[w0];(E;(t0),I) ê Ekv(E;(t0),I). Det følger altså at Ekv(E;(t0),I) er en ikke-tom mengde. La oss sette a= [w0];(E;(t0),I) Da har vi altså
(3) aêEkv(E;(t0),I). Men (4) Ekv(E;(t0),I) ê Mg(Ekv(E;t,I): têT). Fra (3) og (4) følger så aê UN(Mg(Ekv(E;t,I): têT)) =Q. Fra dette følger i sin tur at Q er ikke-tom.

Vi må imidlertid også vise at h oppfyller de krav som stilles til en distribusjonsfunksjon i en tilstandsstruktur. Dette innebærer at vi må vise tre ting:

(i) For det første må vi vise at Func(h). Anta derfor for vilkårlige x,y og z at <x,y>êh og <x,z>êh. Fra definisjonen av h som er gitt i satsen følger det da

(4.1) <x,y> = <w1, Mg(<t, Mg(w': <w',w1>êE;t)> :têT)> for noe w1êI

(4.2) <x,z> = <w2, Mg(<t, Mg(w': <w',w2>êE;t)> :têT)> for noe w2êI

Herav w1=x=w2 og derfor:

y= Mg(<t, Mg(w': <w',w1>êE;t)> :têT) =
Mg(<t, Mg(w': <w',w2>êE;t)> :têT) = z

Dette viser at h er en funksjon.

(ii) Dessuten må vi vise at domenet til h er I, dvs. Dom(h) =I. Dette følger imidlertid umiddelbart fra definisjonen av h

(iii) Tilslutt må det bevises at Rgn(h) Inkl Q^T. Anta fêRgn(h). Da har vi at det finnes wêI slik at (5) f= h(w). Fra definisjonen av h følger det da at

(6) f= Mg(<t, Mg(w': <w',w>êE;t)> :têT)

For å vise at fêQ^T må vi vise at f er en funksjon. Dette gjøres i prinsippet på samme måte som under (i). Vi hopper derfor over detaljene her. Dessuten må vi vise at Dom(f) = T. Dette er også temmelig opplagt i lys av (6). Derfor hopper vi også over bevisdetaljene for dette. Tilslutt må vi vise at Rgn(f) Inkl Q. La oss gå litt mer detlajert til verks i denne forbindelse:

Anta (7) xêRgn(f). Da har vi at (8) x= f(t) for noe têT. Fra (6) og (8) kan man slutte: (9) f(t) = Mg(w': <w',w>êE;t) = [w];(E;t,I) ê Ekv(E;t,I) Inkl Q = UN(Mg(Ekv(E;t,I): têT)) Det følger at x=f(t)êQ. Siden x var et vilkårlig objekt har vi Rgn(f) Inkl Q. Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Som man ser fra satsen ovenfor starter vi med in insidensstruktur M og definerer så på

den måten som er vist i satsen en ny struktur M* som vi viser at er en tilstandsstruktur. Denne tilstandsstrukturen M* skal vi kalle for den naturlige tilstandsstrukturen assosiert med M. Igjen oppsummerer vi dette i form av en formell definisjon:

Definisjon 7.4 Anta M=<I,T,E> er en insidensstruktur. Definer Q ved:
Q= UN(Mg(Ekv(E;t,I): têT)) og definer h ved:
h= λ/wêI/(Mg(<t, Mg(w': <w',w>êE;t)> :têT))
Definer tilslutt M' ved: M'= <I,T,Q,h> . Da kalles M' for den naturlige tilstandsstrukturen assosiert med insidensstrukturen M.

Man kan stille følgende spørsmål: Anta vi starter med en tilstandsstruktur M. Anta så at vi betrakter den naturlige insidensstrukturen M* assosiert med M. La så M** være den naturlig tilstandsstrukturen assosiert med M*. Er da M** identisk med M? Svaret på dette spørsmålet er benektende. Man ser dette ganske raskt om man betrakter definisjonene ovenfor.

Det vi derimot kan vise er at dersom M* er den naturlige tilstandsstruktur assosiert med insidensstrukturen M, og M** er den naturlige insidensstrukturen assosiert med M*, så har man faktisk at M** = M.

Dette er innholdet i den følgende sats.

Teorem 7.5 La M være en vilkårlig insidensstruktur. Anta (i) at M* er den naturlige tilstandsstrukturen assosiert med med M. Anta videre at (ii) M** er den naturlige insidensstrukturen assosiert med M**. Da gjelder:
M** = M

Bevis: Anta M=<I,T,E> er en vilkårlig insidensstruktur. Siden M* er den naturlige tilstandsstrukturen assosiert med M har vi da at (1) M* = <I,T,Q,h*> der
(2) Q= UN(Mg(EKv(E;t,I): têT) og
(3) h* = λ/wêI/(Mg(<t, Mg(w': w'êI & <w',w>êE;t)>: têT))
Siden M** er den naturlige insidensstrukturen assosiert med M* har vi at
(4) M** = <I,T,E+>
der E+ er definert ved:
(5) E+ = λ/têT/(Mg(<w,w'>: w,w'êI & h*(w);t = h*(w');t)
For å vise at M** = M er det naturligvis tilstrekkelig å vise at E= E+. Dette er ganske likefrem:
Anta w,w'ÊI og at têT for vilkårlige w,w' og t. Da har vi:
<w,w'>êE+(t) ↔ w,w'êI & h*(w);t = h*(w');t
↔ Mg(w": w"êI & <w",w>êE;t) ↔ Mg(w": w"êI & <w",w'>êE;t)
↔ <w,w'>êE;t
Den siste bikondisjonalen holder fordi E;t, for ethvert têT er en ekvivalensrelasjon over I. Dette viser at satsen holder. **QED.**

La oss betegne klassen av alle insidensstrukturer med S;i og klassen av absolutt alle tilstandsstrukturer med S;t. Er MêS;i lar vi φ(M) betegne den naturlige tilstandsstrukturen assosiert med M og er MêS;t betegner ξ(M) den naturlige insidensstrukturen assosiert med M.
Satsen vi har vist rett ovenfor kan da reformuleres slik:
(+) (AM)(MêS;i → ξ(φ(M)) = M)
Men som nevnt ovenfor har vi imidlertid *ikke* at: (AM)(MêS;t → φ(ξ(M))=M). Kaller vi

dermot to tilstandsstrukturer M og M' for ekvivalente, i symboler M ~M' hvis og bare hvis ξ(M) = ξ(M') kan vi ved hjelp av (+) slutte at

(++) (AM)(MêS;t → φ(ξ(M)) ~ M).

Det er lett å se at dette er tilfelle: Anta MêS;t. Da har vi at ξ(M)êS;i og derfor ved hjelp av (+) at ξ(φ(ξ(M))) = ξ(M). Men fra dette siste følger at φ(ξ(M)) er ekvivalent med M, ie φ(ξ(M)) ~ M. Derfor holder naturligvis (++).

§8 Ekvivalens mellom tilstandsstrukturer og normaliserte tilstandsstrukturer.

Den definisjonen av ekvivalens mellom tilstandsstrukturer som vi nevnte ovenfor formulerer vi mer formelt slik:

Definisjon 8.1 Anta M og M' er to tilstandsstrukturer. Da sies M og M' å være *ekvivalente* hvis og bare hvis den naturlige insidensstrukturen assosiert med M er identisk med den naturlige insidensstrukturen assosiert med M'.

Det er klart at den relasjonen mellom tilstandsstrukturer som er innført ved Definisjon 7.6 er en ekvivalensrelasjon. Det vi nå vil forsøke å vise er at enhver tilstandsstruktur alltid er ekvivalent med en tilstandsstruktur av en spesiell art. Denne spesielle klasse av tilstandsstruktukturer skal vi kalle for *normaliserte.* Vi avgrenser de normaliserte tilstandsstrukturene ved den følgende definisjon:

Definisjon 8.2 La M= <I,T,Q,h> være en tilstandsstruktur. Da kalles M for normalisert hvis og bare hvis den oppfyller det følgende krav:

(+) Det finnes en enummerering e av Q der e: α;0 - (1-1,på)→ Q

for noe ordinaltall α;0 slik at det følgende gjelder:

(At)(têT→ (Eβ)(βêOn &

β <= α;0 & Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w);t = a)) = e"β))

Denne definisjonen er en tanke komplisert og trenger endel forklaringer. Anta M= <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Har vi da at aêQ & (Ew)(wêI & h(w);t =a) for noe têT innebærer dette at det finnes en mulig verden der den totalprosessen som er realisert i denne verden, h(w), ved tidspunktet t befinner seg i totaltilstanden aêQ. Dette innebærer at det er logisk mulig at totaltilstanden a kan foreligge realisert ved tidspunktet t i en eller annen verden. Vi sier derfor at a er logisk sett realiserbar ved tidspunktet t. Mengden av alle de totaltilstandene i Q som logisk sett er realiserbare ved tidspunktet t er derfor:

Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w);t = a))

Vi skal betegne denne mengden med S;t. Anta nå at e er en enummerering av Q av den typen som er nevnt i definisjonen, dvs. er en funksjon som avbilder e et bestemt-ordinaltall α;0 en-entydig og på Q. Da vil naturligvis α;0 være likemektig med Q. Dette innebærer at de enkelte totaltilstandene i Q kan representeres ved en sekvens av følgende art:

(++) e(0), e(1), ..., e(n), ... , e(ω), e(ω+1), ..., e(2*ω), ...

Kravet som er nevnt i definisjonen innebærer at S;t, dvs. alle de totaltilstandene som er logisk sett realiserbare ved tidspunktet t skal utgjøre et begynnelsesstykke av den sekvensen som vi har forsøktå anskueliggjøre ved (++). Er for eksempl t;0êT kan det for eksempel være at S;(t;0) = {e(0), ..., e(ω)} Er t;1 et annet tidspunkt må det være slik at det finnes et ordinaltall β <= α;0 slik at S;t = {e(0),....., e(β)}. Naturligvis behøver ikke β å være noe

uendelig ordinaltall. Det kan utmerket vel være et endelig ordinaltall. På den annen side er det jo intet som hindrer at kardinaltallet til mengden av totaltilstander i en tilstandsstruktur kan være "enormt stort". Poenget er, som nevnt, bare at S;t for ethvert têT må utgjøre et initialsegment av sekvensen e. Dette er hva som kreves for at tilstandsstrukturen M skal kunne kalles for normalisert.

§9 Et representasjonsteorem for tilstandsstrukturer

Det vi vil forsøke er å gi et bevis for den følgende sats som sier at enhver tilstandsstruktur er ekvivalent med en tilstandsstruktur som er normalisert i den betydning som er fastlagt ved Definisjon 8.2.

Teorem 9.1 (Representasjonsteorem I) Enhver tilstandsstruktur M er ekvivalent med en tilstandsstruktur M* som er normalisert.

Vi har tillatt oss å kalle satsen ovenfor for et representasjonstorem. Man kan undres over hvorvidt uttrykket "representasjonsteorem" ikke er en smule misvisende i denne forbindelse. Vanligvis, som for eksempel ved Stones representasjonsteorem for Boolske algebraer[5], taler man om et representasjonsteorem i forbindelse med en klasse av algebraiske strukturer bare hvis man kan definere en isomorfirelasjon på en naturlig måte mellom de enkelte elementene i klassen. Et representasjonsteorem for en slik strukturklasse vi da være en sats som sier at enhver struktur i mengden er isomorf med en struktur i klassen som har visse spesielle egenskaper. Disse spesielle strukturene kan da representere hele klassen av strukturer. Vi gjør derfor oppmerksom på at det bare er i en utvannet betydning at teoremet ovenfor kan kalles et representasjonsteorem. Vi har jo ikke definert noen form for isomorfirelasjon mellom tilstandsstrukturene, bare en form for ekvivalens.

Før vi gir et eksplisitt bevis for Teorem 9.1 skal vi bevise to satser som gjør det avgjørende argumentet kortere. Merk at i det følgende betegner "Cd(X)", der X er en mengde, kardinaltallet til mengden X. Vi identifiserer kardinaltallet til en mengde med det minste ordinaltallet som er likemektig med mengden.

Først tar vi for oss den følgende sats:

Teorem 9.2 La I,T være to ikke-tomme mengder. La P være en funksjon som til ethvert element têT tilordner t en partisjon P;t av I. La α;0 være det ordinaltallet som er den minste øvre grense for kardinaltallene i Mg(Cd(P;t): têT)[6] La for hvert têT, e(P;t) være en funksjon der vi har e(P;t) : Cd(P;t) - (1-1,på) → P;t.

Definer nå en struktur M= <I,T,α;0, h> ved å la I,T og α;0 være som ovenfor, og ved å definere h ved:

h= λ/wêI/[λ/têT/{(iβ)(βêCd(P;t) & wê e(P;t)(β))}]

Da har man at følgende tre påstander holder:

(a) M er en tilstandsstruktur

(b) Har man wêI & têT så gjelder:

Mg(w': w'êI & h(w);t = h(w');t) êP;t

---

[5] Stones representasjonsteorem sier at enhver Boolsk algebra B er isomorf med en mengdealgebra som er basert på mengden av alle maksimale idealer i B. Se Stoll [1], side 271

[6] Merk at det ikke er noe som tilsier at det må finnes et største kardinaltall i mengden Mg(Cd(P;t): têT). Dette er en langt sterkere forutsetning en den som er gjort her.

(c) Er têT har man at:

Mg(Mg(w: wêI & h(w);t = h(w');t): w'êI) = P;t

Man bør bemerke at dersom P;t er en partisjon av I kan ikke denne partisjonen ha et større kardinaltall enn I. Dette er fordi den fineste partisjonen av I vil være Mg({w}: wêI). Det følger at Cd(P,t) <= Cd(I) for alle têT. Derfor må også Mg(Cd(P,t): têT), som er en mengde med ordinaltall, ha et ordinaltall α;0 som er den den minste øvre grensen til denne mengden. Denne minste øvre grensen kan imidlertid godt være mindre enn kardinaltallet til I.

Bevis for Teorem 9.2: *Ad (a):* Vi må vise at den M som er definert i teoremet oppfyller de krav som stilles til en tilstandstruktur. Siden I og T er ikke-tomme mengder følger det at mengden av de diverse P;t, der têT, er ikke-tom. Kardinaltallet til enhver slik P;t må derfor være større enn 0. Det følger at α;0, som er den minste øvre grensen for de divere Cd(P;t) ettersom t gjennomløper T, må være større enn 0 og derfor en ikke-tom mengde.[7] Det følger at I,T, og α;0 er ikke-tomme mengder. Vi må imidlertid også vise at h er en funkjon som avbilder I inn i α;0^T. At domenet til h er I fremgår umiddelbart av definisjonen. Videre er det åpenbart at h er en funksjon. Vi må imidlertid vise om w er et vilkårlig element i I at h(w)êα;0^T. At h(w) er enn funksjon fremgår også umiddelbart av definisjonen av h som er gitt i satsen. Den samme definisjon gjør det også klart at domenet til h(w) er T, om wêI. Det eneste vi må vise er derfor at Rgn(h(w)) Inkl α;0. Nå har vi, om x er et vilårlig element i Rgn(h(w)), at x= h(w);t for noe têT. Fra definisjonen av h som er gitt i teoremet følger det da at h(w);t = (iβ)(βêCd(P;t) & wê e(P;t)(β)). Dette impliserer at h(w);t=β for noe β êCd(P;t). Siden Cd(P;t) <= α;0 har vi Cd(P;t) Inkl α;0. Det følger at h(w);têα;0, som er det vi ønsker.

Ad (b): Anta for vilkårlige w,t at (1) wêT & têT. Fra dette og definisjonen av h i teoremet følger: (2) h(w);t = (iβ)(βêCd(P;t) & wê e(P;t)(β))

La oss før vi går videre vise at :

(3) P;t = Mg(e(P;t)(β) : βêCd(P;t))

Vi har, siden e(P,t) er en en-entydig avbildning av Cd(P;t) på P;t at

(4) e(P;t) : Cd(P;t) -(1-1,på)→ P;t

Anta nå at xêP;t for noe x. Da har vi ved hjelp av (4) at det finnes β slik at x= e(P;t)(β) og βêCd(P;t). Dette impliserer: xê Mg(e(P;t)(β) : βêCd(P;t)). Har vi på den annen side, for vilkårlig x, at xê Mg(e(P;t)(β) : βêCd(P;t)) følger det at det finnes β slik at x=e(P;t)(β) og βêCd(P;t). Men da har vi åpenbart ved hjelp av (4) at xêP;t. Dette viser at (3) holder.

Vi tar sikte på å bevise: (5) Mg(w': w'êI & h(w');t = h(w);t) êP;t. I lys av (3) er det da tilstrekkelig å bevise:

(6) (Eβ)(βêCd(P;t) & Mg(w': w'êI & h(w');t = h(w);t) = e(P;t)(β))

La oss sette (7) β0 = (iβ)(βêCd(P;t) & wê e(P;t)(β)). Fra dette og (2) har man (8) h(w);t= β0.

Dessuten har vi ved hjelp av (7) at (9) wê e(P;t)(β0). Dessuten har vi fra (7) at følgende holder: (10) β0êCd(P;t). Siden vi vil bevise (6) er det derfor tilstrekkelig å bevise:

(11) Mg(w': w'êI & h(w');t = h(w);t) = e(P;t)(β0)

Vi viser først inklusjonen mot vnstre i (11): Anta for vilkårlig w' at (12) w'ê e(P;t)(β0). Da har vi: (13) w'êI. Fra dette, det at têT og definisjonen av h følger at

(14) h(w');t = (iβ)(βêCd(P;t) & w'ê e(P;t)(β))

Sett per definisjon (15) β1 = (iβ)(βêCd(P;t) & w'ê e(P;t)(β)). Fra (15) følger:

(16) w'ê e(P;t)(β1). Nå har man ved hjelp av (4) at e(P;t)(β0), e(P;t)(β1) êP;t. Videre

[7]For ordens skyld nevnes det at vi benytter von Neumanns versjon av ordinaltallene. Da er ethvert ordinaltall mengden av alle de ordinaltall som kommer før det i rekken.

har vi ved hjelp av (12) og (16) at e(P;t)(β0) Ω e(P;t)(β1) ≠ ø. Siden P;t er en partisjon av I må da e(P;t)(β1) = e(P;t)(β0). Siden e(P;t) dessuten er en-entydig følger det at β0 = β1. Fra dette (14), (15) og (8) følger h(w');t = h(w);t. Siden w'êI har vi derfor at w'êMg(w': w*êI & h(w');t = h(w);t). Dette viser at inklusjonen mot venstre i (11) holder.

La oss så ta for oss inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig w' at (17) w'êI & h(w');t = h(w);t. Siden w,w' êI og têT har (2) og (14) holder. Definerer vi da β0 og β1 som ved (7) og (15) har vi at β0=β1 i lys av (17). Viere følger det fra (15) at w'ê e(P;t)(β1). Men siden β1 = β0 har vi selvfølgelig fra dette at w'ê e(P;t)(β0). Dette viser at også inklusjonen mot høyre i (11) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (b) i teoremet.

Ad (c): Anta têT. Vi skal vise:

(+) Mg(Mg(w: wêI & h(w);t = h(w');t): w'êI) = P;t

Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre i (+). Anta derfor for vilkårlig x at xêMg(Mg(w: wêI & h(w);t = h(w');t): w'êI). Da finnes det w'êI slik at x= Mg(w: wêI & h(w);t = h(w');t). Ved hjelp av punkt (b) i teoremet, som vi nå har bevist, kan man da slutte, siden w'êI og têT at xêP;t.

Dernest tar vi for oss inklusjonen mot venstre. Anta følgelig, for vilkårlig x, at (1) xêP;t. Vi har tidligere bevist (se beviset for pukt (b) ovenfor) at

(2) P;t = Mg(e(P;t)(β) : β êCd(P;t)). Fra (1) og (2)

Fra (1) og (2) følger det at det finnes β slik at (3) x= e(P;t)(β) og (4) βêCd(P;t). Siden P;t er en partisjon av I og xêP;t har vi at x er en ikke-tom mengde og derfor at det finnes w' der (5) w'êx og derfor (6) w'êI. Siden têT følger fra (6) og punkt (b) som vi har bevist, at

(7) Mg(w: wêI & h(w);t = h(w');t) êP;t. Sett per definisjon:

(8) z0 =Mg(w: wêI & h(w);t = h(w');t). Da har vi ved hjelp av (7) at z0êP;t. Men fra (8) fremgår det at w'êz0 siden vi åpenbart har h(w');t = h(w');t. Vi har derfor w'êz0 og w'êx og dessuten at z0,xêP;t. Siden P;t er en partisjon må da z0=x. Fra dette og (8) følger: x= Mg(w: wêI & h(w);t = h(w');t), og siden w'êI har vi da:

xêMg(Mg(w: wêI & h(w);t = h(w');t): w'êI). Det viser at inklusjonen mot venstre i (+) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. QED.

Vi skal nå gi bevis for den følgende sats som har de samme forutsetninger som det forrige teoremet:

Teorem 9.3 La I,T være to ikke-tomme mengder. La P være en funksjon som til ethvert element têT tilordner t en partisjon P;t av I. La α;0 være det ordinaltallet som er den minste øvre grense for kardinaltallene i Mg(Cd(P;t): têT)[8] La for hvert têT, e(P;t) være en funksjon der vi har e(P;t) : Cd(P;t) - (1-1,på) → P;t.

Definer nå en struktur M= <I,T,α;0, h> ved å la I,T og α;0 være som ovenfor, og ved å definere h ved:

h= λ/wêI/[λ/têT/{(iβ)(βêCd(P;t) & wê e(P;t)(β))}]

Da har man at følgende tre påstander holder:

(a) M er en tilstandsstruktur

(b) Det finnes en enummerering e av α0 der e: β - (1-1,på)→ α0 for et eller annet ordinaltall β slik at følgene holder:

[8] Merk at det ikke er noe som tilsier at det må finnes et største kardinaltall i mengden Mg(Cd(P;t): têT). Dette er en langt sterkere forutsetning en den som er gjort her.

(At)(têT →
(Eγ)(γêOn & γ <= β & Mg(a: aêα0 & (Ew)(wêI & h(w);t =a)) = e"γ))[9]

Som man ras[10]kt ser er forutsetningene i denne satsen identiske med forutstningene i den foregående sats. Punkt (a) i teoremet er også identisk med punkt (a) i forrige teorem. Vi har derfor bevist det. Punkt (b) i teoremet viser at tilstandsstrukturen M= <I,T,α;0, h> er det vi har omtalt som "normalisert".

Bevis: Siden vi har bevist (a) tidligere, tar vi bare for oss punkt (b).

Ad (b): Vi lar e være identitetsrelasjonen begrenset til α;0, med andre ord setter vi: e= Rest(I,α;0). Da har vi åpenbart at e : β - (1-1,på) → α;0 om β=α;0. For å bevise satsen vil det være tilstrekkelig å godtgjøre:

(+) (At)(têT →. Ct(P;t) <= α;0 &
Mg(a: aêα;0 & (Ew)(wêI & h(w);t=a)) = Cd(P;t))

Man legger merke til det følgende her: Setter man γ = Cd(P;t) har man åpenbart at γ <= β=α;0 og at e"γ = Rest(I,α;0)"γ = Rest(I,α;0)"Cd(P;t) = Cd(P;t). Dette viser at det er tilstrekkelig å vise (+).

Anta (1) têT. Da har vi åpenbart at Cd(P;t) <= α;0 siden α;0 etter forutsetningene er den minste øvre grense for Mg(Cd(P;t): têT). Vi må bevise at:

(2) Mg(a: aêα;0 & (Ew)(wêI & h(w);t=a)) = Cd(P;t)

(I) Vi viser først at inklusjonen mot høyre i (2) holder. Anta for vilkårlig a at (3) aêα;0 & (Ew)(wêI & h(w);t=a). Da finnes det en w slik at (4) wêI & h(w);t =a. Fra den definisjon av h som forutsetningsvis er gitt i satsen følger:

(5) h(w);t = (iβ)(βêCd(P;t) & wê e(P;t)(β))

Fra dette og (4) følger: (6) a= (iβ)(βêCd(P;t) & wê e(P;t)(β)). Fra dette følger åpenbart i sin tur at aêCd(P;t) som er det vi ønsker.

(II) Vi tar så for oss inklusjonen mot venstre i (2). Anta derfor at for vilkårlig a at (7) aêCd(P;t). Siden (8) e(P;t) : Cd(P;t) - (1-1,på) → P;t har vi da (9) e(P;t)(a)êP;t. Siden P;t er en partisjon må da e(P;t)(a) være ikke-tom. Det må følgelig finnes en w slik at (10) wê e(P;t)(a). e(P;t) er en-entydig og P;t er en partisjon følger ved hjelp av (7) og (10) at a= (iβ)(βêCd(P;t) & wê e(P;t)(β)). da har vi (11) h(w);t=a &wêI. Siden aêCd(P;t) <= α;0 følger det også at (12) aêα;0. Fra (11) og (12) følger umiddelbart aêα;0 & (Ew)(wêI & h(w);t=a). Dette viser at inklusjonen mot venstre holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Etter at vi nå har vist disse satsene er det forholdsvis enkelt å levere et bevis for det representasjonsteoremet vi tidligere formulerte:

Bevis for representasjonsteorem I : Anta M*= <I,T,Q, h*> er en vilkårlig tilstandsstruktur. Definer E;t for alle têT ved:

E;t = Mg(<w1,w2>: w1,w2êI & h*(w1);t = h*(w2);t)

Definer videre E ved E = λ/têT/(E;t). Det skulle da være klart at <I,T,E> er den naturlige insidensstrukturen assosiert med M*. Vi har naturligvis at I og T er ikke-tomme mengder.

---

[9] Merk at "On" betegner klassen av alle ordinaltall.

[10] Er f en funksjon og X en mengde betegner Rest(f,X) restrisjonen av f til X, dvs. at Rest(f,X) = Mg(<x,f(x)>: xêX). I er identitetsrelasjonen, med andre ord: I= Mg(<x,x>: x=x).

Definer nå for hvert element t i T en funksjon P ved å sette P;t = Ekv(E;t,I) om têT. Da har man at P;t er en partisjon av I for alle têT. La α;0 være det ordinaltall som er den minste øvre grensen for kardinaltallene i mengden Mg(Cd(P;t): têT). Vel dessuten ut for hvert têT en funksjon e(P;t) der man har: e(P;t): Cd(P;t) - (1-1,på) → P;t. Definer så M ved å sette M= <I,T,α;0,h> der h er definert som i teoremet ovenfor, dvs. ved:

h= λ/wêI/(λ/têT/((iβ)(βêCd(P;t) & wê e(P;t)(β))))

Da har vi ved hjelp av teoremet vi nettopp har bevist at M er en tilstandsstruktur som er normalisert. Det eneste vi nå må vise er at M er ekvivalent med M*. Dette innebærer at vi må vise at den insisdensstrukturen som er naturlig ssosiert med M er insidensstrukturen <I,T,E> som vi introduserte rett ovenfor. Vi definerer E*(t) der têT ved:

E*;t = Mg(<w1,w2> : w1,w2êI & h(w1);t h(w2);t)

Videre setter vi E*= λ/têT/(E*;t). Man ser da at <I,T,E*> er den naturlige insidensstrukturen assosiert med M. Det vi nå være nok å vise at <I,T,E> = <I,T,E*> for å godtgjøre at M er ekvivalent med M*. Det følger at det vil være nok å bevise at

(+) E*;t = E;t for alle têT

Anta derfor at têT og at (1) <w1,w2>êE*;t. Da har man (2) w1,w2êI og dessuten at w1êMg(w': w*êI & h(w');t = h(w2);t). Da har vi i kraft av Teorem 9.2 at

Mg(w': w*êI & h(w');t = h(w2);t)êP;t = Ekv(E;t,I). Siden w2êI og Ekv(E;t,I) er en partisjon av I har vi at Mg(w': w'êI & h*(w');t = h(w2);t) êEkv(E;t,I). Siden w2 er med i både

Mg(w': w*êI & h(w');t = h(w2);t) og

Mg(w': w*êI & h*(w');t = h*(w2);t)

og Ekv(E;t,I) er en partisjon av I følger det at disse to mengdene er identiske. Men da må vi ha at w1êMg(w': w*êI & h*(w');t = h*(w2);t) og derfor at h*(w1);t = h*(w2);t. Herav følger <w1,w2>êE;t. Dette viser at inklusjonen mot høyre i (+) ovenfor holder.

Vi viser så inklusjonen den andre veien. Anta derfor at <w1,w2>êE;t. Da har vi: w1,w2êI og (3) w1êMg(w': w'êI & h*(w');t = h*(w2);t). La oss sette

(4) ξ(w2) =Mg(w': w'êI & h*(w');t = h*(w2);t). Siden w2êI og Ekv(E;t,I) er en partisjon av I følger det at (5) ξ(w2)êEkv(E;t,I). I lys av (3) har vi dessuten (6) w1êξ(w2). Siden Ekv(E;t,I) = P;t har vi at ξ(w2)êP;t og derfor i lys av et tidligere teorem at det må finnes w der (7) wêI & ξ(w2) = Mg(w': w'êI & h(w');t = h(w);t). Siden (8) w2êξ(w2) og vi dessuten har at (6) holder har vi fra (6),(7) og (8) at

h(w1);t = h(w);t og h(w2);t = h(w);t. Det følger at h(w1);t = h(w2);t og derfor at <w1,w2>êE*;t. Dette viser at ogsså inklusjonen mot venstre i (+) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Representasjonsteorem 1, dvs. Teorem 9.1. **QED.**

§10 Noen eksempler.

Vi skal i denne paragrafen se på endel eksempler. Vi ser først på den følgende tilstandsstruktur M;0 = <I,T,Q,h> der de enkelte komponentene er bestemt på følgende måte. For det første skal T bare bestå av tre distinkte tidspunkter t;1, t;2 og t;3. T er altså {t;0,t;1, t;2}. Tilsvarende skal mengden av totaltilstander bare bestå av tre distinkte slike tilstander, a, b og c. Vi setter altså

Q= {a, b, c}. Vi anskueliggjør de enkelte funksjonene i Q^T ved uttrykk av typen "aaa", "acb", "bbc" etc. Som man skjønner er funksjonen fêQ^T som representeres av uttrykket "acb" den funksjonen som til t;1 tilordner totaltilstanden a, og som til tidspunktene t;2 og t;3 tilordner henholdsvis totaltilstandene c og b. Vi lar mengden av mulige verdener i modellen inneholde tolv distinkte elementer som betegnes w;1,...., w;12. I er altså {w;1, ... , w;12}.

Selve distribusjonsfunksjonen h i tilstandsstrukturen M;0 er definer ved den følgende tabell:

Verden	Totalprosess	Verden	Totalprosess
w;1	aaa	w;7	aab
w;2	aba	w;8	abb
w;3	aca	w;9	acb
w;4	baa	w;10	bab
w;5	bba	w;11	bbb
w;6	bca	w;12	bcb

Fra figuren fremgår det at h tilordner for eksempel verdenen w;5 totalprosessen bba. Dette innebærer at h(w;5)(t;2) =b og at h(w;5)(t;3) =a. Tilsvarende kan sies om for eksempel h(w;11) eller h(w;10). Som man ser av tabellen vil det være noen totalprosesser, for eksempel ccc som h ikke tilordner noen logisk mulig verden. To verdener w og w' sammenfaller ved tidspunktet t hvis og bare hvis h(w);t = h(w');t . Man ser at dette er en ekvivalensrelasjon. Denne relasjonen deler mengden I inn i ekvivalensklasser. Vi setter

E;t = Mg(<w,w'>: w,w'êI & h(w);t = h(w');t).

Fra tabellen ser man at de to ekvivalensklassene som E;(t;1) gir opphav til er henholdsvis:

X;(11) = { w;1,w;2,w;3, w;7,w;8, w;9}

X;(12) = { w;4,w;5,w;6, w;10,w;11, w;12}

Tilsvarende ser man at E;(t;2) gir opphav til tre ekvivalensklasser:

X;(21) = {w;1,w;4,w;7, w10}

X;(22) = {w;2,w;5,w;8, w11}

X;(23) = {w;3,w;6,w;9, w12}

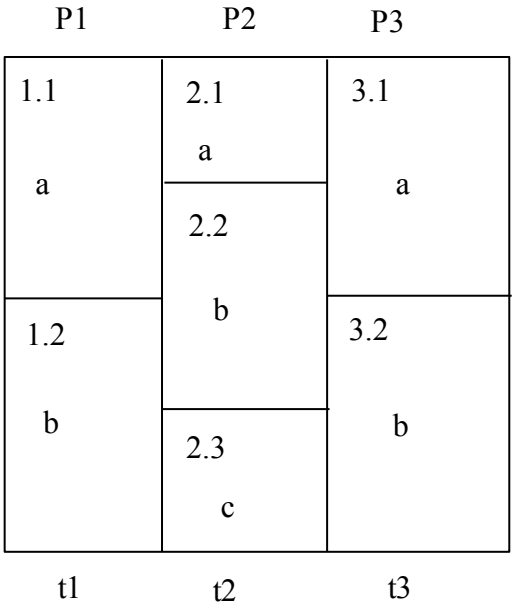
Endelig ser man at ekvivalensrelasjonen E;(t;3) inndeler I i to ekvivelnsklasser, nemlig:

X;(31) = {w;1,w;2,w;3, w;4,w;5, w;6}

X;(32) = {w;7,w;8,w;9, w;10,w;11, w;12}

Vi har nå oppgitt de syv "insidensklassene" som tilstandstrukturen M gir opphav til.

Figur 1



Figuren illustrerer de forskjellige partisjonene av I som strukturen gir opphov til ved de forskjellige tidspunktene t;1 - t;3. Pi er altså partisjonen som E;(t;i) (i=1,...,3) gir opphav til. Det fremgår av det som er sagt at P1 = {X;(11), X;(12)} , P2 ={X;(21), X;(22), X;23)} og at P3= {X;(31), X;(32)}.

Setter man E = λ/têT/(E;t) der E;t er definert som ovenfor, ser man at strukturen <I,T,E> er den insidensstrukturen som er naturlig assosiert med tilstandsstrukturen M. De diverse ekvivalensrelasjonene E;(t;i) for i= 1 ... 3 kunne også ha vært definert på følgende måte:

E;(t;1) = Mg(w,w'>: w,w'êI &(w,w'êX;(11) v w,w'êX;(12)))
E;(t;2) = Mg(w,w'>: w,w'êI &(w,w'êX;(21) v w,w'êX;(22) v w,w'êX;(23)))
E;(t;3) = Mg(w,w'>: w,w'êI &(w,w'êX;(31) v w,w'êX;(32)))

Leseren kan lett på egenhånd kontrollere at dette stemmer.

Det er ikke spesielt vanskelig å se at den tilstandstrukturen M;0 = <I,T,Q,h> som vi har definert ovenfor er normalisert. Vi kan definere en enummerering e av Q ved:

e: {<0,a>, <1,b>,<2,c>}

Man ser da umiddelbart at e: 3 - (1-1,på) → Q. Går vi igjennom rekken av tidspunkter t;1,...,t;3 ser man at vi har, dersom t = t;1, at:

Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w)(t;1)=a)) = {a,b} = e"2 & 2<3

Videre ser man at dersom t =t;2 har vi:

Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w)(t;2)=a)) = {a,b,c} = e"3 & 3<=3

Endelig ser man at dersom t= t;3 har vi:

Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w)(t;3)=a)) = {a,b} = e"2 & 2<3

Det følger at vi har:

(At)(têT → (Eβ)(βêOn & β <= 3 &
Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w)(t)=a)) = e"β))

Dette viser at M;0 er normalisert.

La oss nå gi et eksempel på en tilstandsstruktur M;1 som er ekvivalent med M;0 men som ikke er normalisert. Vi setter M:1 = <I,T, Q*,h*>. Her er I og T som ovenfor. Det vil si at:

I = {w;1 ..... w:12} og t = {t;1 ... t;3}

Derimot er Q* = {a,b,c,d,e, f,g} der alle elementene er distinkte. Q* inneholder altså syv forskjellige totaltilstander.

Den tabellen som definerer distribusjonsfunksjonen h* er nå denne:

Verden	Totalprosess	Verden	Totalprosess
w;1	acg	w;7	acf
w;2	aeg	w;8	aef
w;3	adg	w;9	adf
w;4	bcg	w;10	bcf
w;5	beg	w;11	bef
w;6	bdg	w;12	bdf

Man ser at om vi definerer E*;t ved E*;t = Mg(<w,w'>: w,w'êI & h(w);t = h(w');t), og setter E* = λ/têT/(E*;t) så vil E* = E. Det følger fra dette at de to tilstandsstrukturene M;0 og M;1 er ekvivalente. Derimot ser man at M;1 ikke er normalisert. Uansett hvilken enummerering av Q= {a,b,c .... g} vi velger ut er det umulig å gjøre det på en slik måte at de logisk sett realiserbare totaltilstandene ved hvert tidspunkt utgjør et begynnelsesstykke av denne enummereringen.

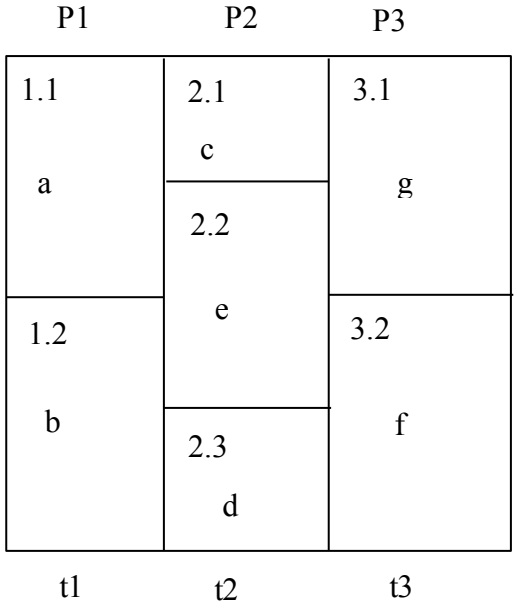
En figur av samme type som den Figur 1 kan settes opp for tilstandsstrukturen M;1. Den er vist på neste side.

§11 Om sterkt differensierte tilstandsstrukturer og ytterligere et representasjonsteorem

Vi har allerede snakket om de verdenene som er logisk sett realiserbare ved et gitt tidspunkt i en tilstandsstruktur. Men vi strengt tatt ikke gitt noen formell definisjon av uttrykket.

Definisjon 11.1 Anta M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. La têT. Da kaller vi S;t = Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w);t=a)) for mengden av de tilstander som logisk sett er realiserbare ved tidspunktet t i strukturen M

Figur 2



Vi trenger også et annet begrep i det følgende. Anta at M er en tilstandsstruktur, og at det gjelder for ethvert tidspunkt t at de logisk sett realiserbare totaltilstandene ved t ikke har noen elementer felles med de logisk sett realiserbare tilstandene ved ethvert annet tidspunkt. Da skal vi kalle M for sterkt differensiert. Ser man på eksempelet M;1 i forrige avsnitt ser man at M;1 er en sterkt differensiert tilstandsstruktur i denne forstand.

Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 11.2 Anta M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Da kaller vi M for *sterkt differensiert* hvis og bare hvis vi har for alle tidspunkter t,t'êT der t≠t' at mengden av alle de totaltistandene som logisk sett er realiserbare ved tidspunktet t ikke har noen elementer felles med mengden av alle de totaltilstandene som er logisk sett realiserbare ved tidspunktet t'. I symboler kan dette kravet formuleres slik:

(At)(At')(t,t'êT & t≠ t' →
Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w);t =a)) Ω
Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w);t =a)) =ø)

Vi skal nå gi et detaljert bevis for den følgende sats:

Teorem 11. 3 (Representasjonsteorem II) Enhver tilstandsstruktur M er ekvivalent med en tilstandsstruktur M' som er sterkt differensiert.

Som det vil fremgå av beviset er denne satsen av en mer overfladisk natur sammenlignet med det representasjonsteoremet vi viste i §9.

Bevis for Teorem 11.3: Anta (1) M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Definer Q* ved å sette: (2) Q* = Mg(<x,t>: xêQ og têT). Definer så h* for alle wêI ved:

(3) h*(w) = Mg(<t, <h(w);t,t>> : têT).

Vi må først vise at (4) M* = <I,T,Q*,h*> er en tilstandsstruktur.

Det skulle være klart at I,T,Q* er ikke-tomme mengder siden (1) holder. Vi må imidlertid vise at h* : I → Q*^T. Det vil være tilstrekkelig å bevise om wêI for vilkårlig w:

(4.1) Func(h*(w)) & Dom(h*(w))=T & Rgn(h*(w)) Inkl Q*

Ata for vilkårlig w at wêI. Da har vi ved hjelp av definisjonen av h* at

(5) h*(w) = Mg(<t, <h(w);t,t>> : têT) . Anta <x,y>,<x,z>êh*(w) for vilkårlige x,y og z. Da må det i lys av (5) finnes t1 og t2 slik at

(6.1) <x,y> = <t1,<h(w);t1,t1>> og

(6.2) <x,z> = <t2,<h(w);t2,t2>>

Fra (6.1) og (6.2) følger: t1 = x = t2 og derfor y = <h(w);t1,t;1> = <t2,<h(w);t2,t2>> =z. Dette viser at h*(w) er en funksjon.

Anta xêDom(h*(w)). Da finnes z slik at <x,z> êMg(<t, <h(w);t,t>> : têT). Dette impliserer at det finnes t der: <x,z> = <t, <h(w);t,t>> &têT. Da har vi x=t og følgelig xêT. Anta på den annen side xêT. Sett y0 = <h(w);x,x>. Da har vi at <x,y0> = <x,<h(w);x,x>>. Fra dette følger siden xêT at (Et)(têT & <x,y0> = <t,<h(w);t,t>>). I sin tur impliserer dette i lys av definisjonen av h*(w) at <x,y0>êh*(w) , og derfor at xêDom(h*(w)).

Anta xêRgn(h*(w)). Da har vi i lys av definisjonen av Rgn at det finnes y slik at <y,x>êh*(w). Fra dette og (5) følger at det finnes têT slik at <y,x>= <t,<h(w);t,t>>. Dette impliserer i sin tur at x=<h(w);t,t>. Siden h(w)êQ^T følger at h(w);têQ . Fra dette og (2) følger så xêQ* siden x=<h(w);t,t> og têT. Vi har derfor Rgn(h*(w)) Inkl Q*. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at M=<I,T,Q*,h*> er en tilstandsstruktur.

Vi må også vise at M* er sterkt differensiert. Anta derfor (7) t1,t2êT & t1≠t2. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes noe q slik at:

(8.1) qêQ* & (Ew)(wêI & h*(w);t1 =q) og

(8.2) qêQ* & (Ew)(wêI & h*(w);t2 =q)

Fra det første følger eksistensen av w1 der (9) w1êI & h*(w1);t1 =q. Fra det andre følger tilsvarende eksistensen av w2 der (10) w2êI & h*(w2);t2 =q. Fra (9) og definisjonen av

h* har vi q= <h(w);t1,t1>. Fra (10) har vi på samme vis: q= <h(w);t2,t2>. Fra disse to forholdene følger imidlertid t1=t2. Dette strider mot (7). Dette viser at M* er sterkt differensiert.

Det gjenstår å vise at M og M* er ekvivalente. Den insidensstrukturen som er naturlig assosiert med M er <I,T,E> der (11) E;t = Mg(<w,w'>: w,w'êI & h(w);t = h(w');t) og (12) E = λ/têT/(E;t)). Den insidensstrukturen som er naturlig assosiert med M* er <I,T,E*> der (13) E*;t = Mg(<w,w'>: w,w'êI & h*(w);t = h*(w');t) og (14) E* = λ/têT/(E*;t). Det vil altså være tilstrekkelig å bevise: E*=E, dvs. (14) E*;t = E;t for alle têT. Anta derfor for vilkårlig t at têT.

Vi viser først inklusjonen mot høyre i (14). Anta for vilkårlige w1,w2 at w1,w2êI & h*(w1);t = h*(w2);t. Ved hjelp av definisjonen av h* følger herav <h(w1);t,t> = h(w2);t,t>. Herav har man h(w1);t = h(w2);t og derfor <w1,w2>êE;t. Omvendt: Er <w1,w2>êE;t følger w1,w2êI & h(w1);t = h(w2);t Da har vi:

h*(w1);t = <h(w1);t,t> = <h(w2);t,t> = h*(w2);t og derfor at <w1,w2>êE*;t. Dette viser E=E* og derfor at M og M* er ekvivalente.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

§12 Nødvendige og tilstrekkelige betingelser for at distribusjonsfunksjonen i en tilstandsstruktur skal være en-entydig og sûrjektiv.

Vi skal i denne paragrafen studere enkelte sider ved det vi har kalt distribusjonsfunksjonen i en tilstandsstruktur. Er M=<I,T,Q,h> en tilstandsstruktur er det intet i definisjonen av begrepet 'tilstandsstruktur', slik vi har definert det, som tilsier at distribusjonsfunksjonen h avbilder mengden av de mulige verdenene på mengden av totalprosesser i Q^T. Heller ikke er det noe som tilsier at h er en en-entydig avbildning. Det vi vil undersøke i denne paragrafen er hva som skal til for at begge disse to kravene skal være oppfylt.

Imidlertid er det nødvendig å fastsette definisjonen av enlkelte begrepsdannelser før vi går videre.

Definisjon 12.1 La M =<I,T,Q,h> være en tilstandsstruktur. Da setter vi per definisjon U= Pt(I). U kalles for mengden av utsagn i tilstandsstrukturen M. De enkelte elementene i U kalles for de enkelte utsagn i strukturen M.

Er altså M en vilkårlig tilstandsstruktur er mengdn av utsagn i denne strukturen rett og slett alle delmengdene av mengden av alle de mulige verdenene i strukturen.

Definisjon 12.2 Anta M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Da setter vi:

u(a,t) = Mg(w: wêI & h(w);t = a)

Vi kaller u(a,t) for utsagnet som sier at totaltilstanden a foreligger realisert ve tidspunktet t

Er M en tilstandsstruktur og x,y utsagn i strukturen M sier vi at utsagnet x impliserer utsagnet y, eller at y er en logisk konsekvens av x, hvis og bare hvis x er inkludert i y. Snittet av x og y kaller vi for konjunksjonen av x og y. Er x et utsagn i tilstandsstrukturen M og er I mengden av de mulige verdenene i M betegner utsagnet I -x med Neg(x). Vi kaller I-x for negasjonen av x. Det skulle ikke være noe eksentrisk eller uvanlig ved disse definisjonene. De gir seg nærmest av seg selv.

Vi trenger ytterligere et begrep:

Definisjon 12.3 La <A;x>/xêb/ være en mengdefamilie indeksert på b. Da er X/xêb/(A;x), kryssproduktet av de diverse A;x ettersom x gjennomløper b definert slik:

X/xêb/(A;x) = Mg(f: Func(f) & Dom(f) = b & (Ay)(yêb → f(y)êA;y))

Etter disse forberedelsene er det nå lettere å presentere de satsene om distribusjonsfunksjonen i en tilstandsstruktur som vi har i tankene. Den første satsen er denne:

Teorem 12.4 Anta M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta

Γ = Mg(u(a,t) : aêQ)

Da har vi at de følgende to betingelser er ekvivalente:

(i) h: I -(1-1,på) → Q^T

(ii) (Ag)(gêΓ → (E!w)(wêI & wêΩ/têT/g(t)))

Vi bemerker at Ω/têT/(g(t)) betegner snittet av de diverse g(t) ettersom t gjennomløper T.

Bevis: Vi viser først at (ii) impliserer (i). (A) Anta (1) at (ii) holder. Siden h: I → Q^T er det tilstrekkelig å bevise følgende to forhold:

(2) h: I - på → Q^T og

(3) h : I - (1-1) → Q^T

Vi viser først at 2) holder. Anta for vilkårig f at (4) fêQ^T. Det er da nødvendig å vise at det finnes wêI slik at h(w) = f. For å gjøre dette vil det være tilstrekkelig å bevise:

(5) (Ew)(wêI & (At)(têT → h(w);t = f(t)))

Siden (4) holder kan vi definere en funksjon g0 ved (6) g0(t) = u(f(t),t) om têT. Vi skal først vise at (7) g0 êΓ. Det er klart at (8) Func(g0). Videre skulle det være lett å innse at (9) Dom(g0) = T. Er têT for vilkårlig t har vi at f(t)êQ og g0(t) = u(f(t),t). Det følger at (10) g0(t)êMg(u(a,t): aêQ). Dette viser at (7) holder. Fra (7) og (1) følger at det finnes w0 der:

(11) w0êI og (12) w0êΩ(têT/(g0(t))

Fra (12) følger: (13) (At)(têT → wêg0(t)). Anta for vilkårlig t at (14) têT. Ved hjelp av (13) følger da at (15) w0êg0(t). Fra (15) og definisjonen av g0 har vi: w0êu(f(t),t). Dette innebærer i lys av definisjonen av u, Definisjon 12.2 at (16) h(w);t = f(t). Siden t var vilkårlig har vi vist: (At)(têT → h(w);t = f(t)). Siden w0êI kan vi derfor konkludere med at (5), og derfor (2), holder.

Vi må naturligvis også vise at (3) holder. Det vil være tilstrekkelig å bevise følgende:

¬ (Ew1)(Ew2)(w1,w2êI & w1≠ w2 & h(w1) = h(w2))

Anta derfor, for reduktio ad absurdum, at det finnes w1, w2 der:

(17) w1≠ w2 & w1,w2êI & h(w1)= h(w2).

Siden h : I → Q^T følger det at (18) h(w1) = f for en eller annen fêQ^T. Definer, på samme måte som ovenfor, g0 ved: g0(t) = u(f(t),t) for alle têT. Da har vi om têT at h(w1);t = f(t) i lys av (18). Videre kan vi ved hjelp av (17) og (18) slutte: h(w2);t = f(t). Det følger, siden t var et vilkårlig element i T at:

(19.1) (At)(têT → w1êu(f(t),t) = g0(t))

(19.2) (At)(têT → w2êg0(t))

Fra dette kan vi slutte: (20) w1,w2êΩ/têT/(g0(t)). På den annen side har vi g0êΓ og derfor ved ved hjelp av (ii), dvs. (1) ovenfor, at (E!w)(wêI & wêΩ/têT/(g0(t)). Dette, (20) og (17) gir en åpenbart en motsigelse. Vi har dermed vist at (ii) impliserer (i).

(B) Vi må også vise at (i) impliserer (ii). Anta derfor:

(21) h: I - (1-1,på) → Q^T. Anta for vilkårlig g at (22) gêΓ. Da har vi ved hjelp

av den andre forutsetningen i satsen at gê X/têT/(Mg(u(a,t): aêQ)). Det følger fra dette, når man tar i betraktning Definisjon 12.3 , at:

(23) Func(g) & Dom(g)=T

(24) (At)(têT → g(t) êMg(u(a,t): aêQ))

Herav følger:

(25) (At)(têT → (Ea)(aêQ & g(t) = u(a,t)))

Ved hjelp av *utvalgsaksiomet* kan man da slutte at det finnes en funksjon f der:

(26) fêQ^T og

(27) (At)(têT → g(t) = u(f(t),t))

Fra (26) og (21) følger eksistensen av w1 êI slik at: h(w1) = f. Da har vi: (At)(têT → h(w1);t = f(t)). Fra dette kan vi ved hjelp av definisjonen av u, Definisjon 12.2, slutte: (At)(têT → w1êu(f(t),t)). Fra dette og (27) følger så (28) w1êΩ/têT/(g(t)).

Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes w2êI slik at (29) w2≠w1 & w2êΩ/têT/(g(t)). Fra dette følger (At)(têT → w2êg(t)). Herav kan vi så slutte ved hjelp av (27) at: (30) (At)(têT → h(w2);t=f;t). Det følger da at h(w2)=f. Men siden vi forutsetter at (i) holder er h en-entydig. Fra dette og det at h(w1)= f følger da w1=w2. Dette strider mot (29). Det følger at (E!w)(wêI & wêΩ/têT/(g(t)). Dette viser at (ii) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Vi skal nå vise en sats som viser at dersom M= <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur så har vi at Mg(u(a,t): aêS;t) utgjør en partisjon av I og at dette er den samme partisjonen som Ekv(E;t,I) der E;t er den naurlige ekvivalensrelasjonen over I. Denne satsen tas med her fordi den kaster noe lys over det begrepet som ble innført i Definisjon 12.2. I denne forbindelse bør man huske på at S;t er mengden av alle de totaltilstandene som logisk sett er realiserbare ved tidspunktet t. Man kan i denne forbindelse konsultere Definisjon 11.1. Vi minner om at S;t er definiert slik: S;t = Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w);t=a)).

Mer nøyaktig er satsen det dreier seg om den følgende:

Teorem 12.5 Anta M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Definer E;t, der têT, ved:

E;t = Mg(<w1,w2>: w1,w2êI & h(w1);t = h(w2);t).

Da har vi:

(i) (At)(têT → Part(Mg(u(a,t): aêS;t), I)

(ii) (At)(têT → Ekv(E;t,I) = Mg(u(a,t): aêQ))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder.

Vi skal først vise (i). Anta têT for vilkårlig têT. Det må da godtgjøres at Mg(u(a,t): aêS;t) er en partisjon av I. (a) La a være et vilkårlig element i S;t. Det er da nødvendig å vise at u(a,t) ≠ ø. Siden aêS;t har vi per definisjon at det finnes wêI slik at h(w);t =a. Men ved hjelp av definisjonen av U, Definisjon 12.2 impliserer dette at wêu(a,t), og derfor at u(a,t) ≠ø.

(b) Anta (1) x,yêMg(u(a,t): aêS;t) og (2) x≠y. Da har vi at det finnes a1,a2 der a1,a2êS;t slik at (3) x= u(a1,t) & y= u(a2,t). Anta for reduktio ad absurdum at xΩy ≠ø. Da finnes det w slik at (4) wêx & wêy. Dette impliserer ved hjelp av (3) og definisjonen av u at: wêI & h(w);t = a1 & h(w);t = a2. Herav følger åpenbart at a1=a2 og derfor, i lys av (3), at x=y. Men dette strider mot (2). det følger at xΩy = ø.

Det skulle være opplagt at u(a,t) Inkl I om aêS;t. Derfor har vi

Mg(u(a,t): aêS;t) Inkl Pt(I). (c) Det gjenstår nå bare å vise at (+) UN(Mg(u(a,t): aêS;t)) = I for å kunne konkludere med at Mg(u(a,t): aêS;t) er en partisjon av I. Inklusjonen mot høyre i (+) er nærmest triviell: Er wêUN(Mg(u(a,t): aêS;t)) har vi wêu(a,t) for noe aêS;t og derfor wêMg(w': w'êT & h(w');t=a). Da har man selvfølgelig at wêI.

Anta på den annen side at wêI. Siden M er en tilstandsstruktur har man da at h(w)êQ^T og derfor at det finnes aêQ slik at h(w);t= a. Det følger da at aêS;t i lys av Definisjon 11.1. Men vi må i tillegg ha, siden wêT & h(w);t=a at wêu(a,t). Det følger at wêx & xêMg(u(a,t): aêS;t) for noe x. herav har vi det vi ønsker nemlig: wêUN(Mg(u(a,t): aêS;t)). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (i) i satsen.

La oss så gi et bevis for punkt (ii). Anta for vilkårlig t at (1) têT. Det er nødvendig å vise at

(2) Ekv(E;t,I) = Mg(u(a,t): aêS;t).

Vi viser først at inklusjonen mot høyre i (2) holder. Anta for vilkårlig x at (3) xêEkv(E;t,I). Ved hjelp av definisjonen av Ekv og E;t følger da at det finnes w der vi har

(4) wêI & x = Mg(w': w'êI & h(w');t = h(w);t)

Siden wêI har vi at (4.1) h(w);t= a for noe aêQ. Da må vi ha (5) aêS;t. Siden wêI & h(w);t=a følger at (6) wêu(a,t).

Vi må vise at x = u(a,t). Anta for vilkårlig w' at w'êx. da følger ved hjelp av (4) h(w');t= h(w);t & w'êI. det følger at h(w');t = a og derfor at w'êu(a,t). Dette viser at x Inkl u(a,t). Anta på den annen side at w'êu(a,t) for vilkårligw'. Da har vi ved hjelp av definisjonen av u at w'êI & h(w');t =a. Men fra (4.1) h(w);t=a. Derfor følger h(w);t = h(w');t. I lys av (4) impliserer dette siste at w'êx.

Vi har nå vist at x = u(a,t) & aêS;t. Det følger ar xêMg(u(a,t): aêS;t). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (2) holder.

Det er elvfølgelig også nødvendig å vise riktigheten av inklusjonen mot venstre i (2). Anta for vilkårlig x at (6) xêMg(u(a,t): aêS;t). Da må det finnes noe a slik at (7) x=u(a,t) & aêS;t. Siden aêS;t har vi ved hjelp av Definisjon1.1, dvs. definisjonen av S;t, at

(8) aêQ og at det finnes w der (9) wêI & h(w);t = a. Vi skal vise at

(10) x = Mg(w': w'êI & h(w'); t = h(w);t).

Fra dette kan man i lys av definisjonen av Ekv(E;t,I) slutte at xêEkv(E;t,I).

Anta for vilkårlig w' at (11) w'êx. Fra dette og (7) følger w'êu(a,t) og derfor ved hjelp av definisjonen av u: (12) h(w');t = a. Fra dette og (9) følger h(w');t = h(w);t. Derfor har vi (13) w'ê Mg(w': w'êI & h(w');t = h(w);t). Dette viser riktigheten av inklusjonen mot høyre i (10). Anta nå at (14) w'ê Mg(w': w'êI & h(w');t = h(w);t). Da har man (15) h(w');t = h(w);t. Fra dette og (9) følger h(w');t = a og derfor at w'êu(a,t) =x. Dette viser at (10) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Vi skal også gi bevis for den følgende enkle sats:

Teorem 12.6 Anta M= <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta videre at h: I - på → Q^T. Da har vi: (At)(têT → S;t=Q)

Bevis: Anta forutsetningene holder og at têT for vilkårlig t. Anta først for vilkårlig x at xêS;t. Da har man ved hjelp av definisjonen av S;t at xêQ & (Ew)(wêI & h(w);t=x). Dette impliserer åpenbart at xêQ. Siden x var vilkårlig viser dette (1) S;t Inkl Q.

Anta på den annen side at xêQ for vilkårlig x. Siden têT må det finnes fêQ^T slik at f(t) = x. Siden h er på Q^T finnes det w der wêI & h(w) = f. Da har man h(w);t = f(t) =x.

Samler man sammen ser vi at xêQ og at det finnes w der wêI & h(w);t =x. Det følger at xêS;t. Dette viser (2) Q Inkl S;t.

Fra (1) og (2) følger Q=S;t. Dette viser at satsen holder. **QED.**

Teorem 12.7 Anta M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta videre at
h: I - (1-1,på) → Q^T
Da gjelder:
(Ag)(gêX/têT/(Ekv(E;t,I)) → (E!w)(wêI & wêΩ/têT/(g(t))))

Bevis: Anta (1) M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta videre (2) h: I - (1-1,på) → Q^T Definer Γ ved (3) Γ= X/têT/(Mg(u(a,t): aêQ)). Fra (1) - (3) og Teorem 12.4 følger : (4) (Ag)(gêΓ → (E!w)(wêI & wêΩ/têT/(g(t)))). Fra (1) og Teorem 12.5 følger: (5) (At)(têT → Ekv(E;t,I) = Mg(u(a,t): aêS;t)). Fra (1) og (2) og Teorem 12.6 har vi (6) (At)(têT → S;t=Q). Fra (5) og (6) følger
(7) (At)(têT → Ekv(E;t,I) = Mg(u(a,t): aêQ))
Fra dette følger: (8) X/têT/(Ekv(E;t,I)) = X/têT(Mg(u(a,t): aêQ). Men fra (3), (4) og (8) kan vi slutte det vi ønsker, nemlig: (Ag)(gêX/têT/(Ekv(E;t,I)) → (E!w)(wêI & wêΩ/têT/(g(t)))). Dette viser at satsen holder. **QED.**

Bemerkning: Under de forutsetningene som er angitt i satsen er konklusjonen ikke tilstrekkelig for å vise at h: I -(1-1,på) → Q^T. Vi skal straks diskutere dette litt mer inngående. S;t er mengden av alle de tilstander som logisk sett er realiserbare ved tidspunktet t. Vi har tidligere sett at X/têT/(S;t) er mengden av alle de funksjoner g der vi har Dom(g) = T og (At)(têT → g(t)êS;t). Siden S;t Inkl Q for alle têT følger det aat X/têT/(S;t)) Inkl Q^T. man bør imidlertid bemerke at det i og for seg ikke er noe som tilsier at X/têT/(S;t) er identisk med Q^T. Har man derfor en tilstandsstruktur M = <I,T,Q,h> der h avbilder I *på* X/têT/(S;t) følger det ikke at h avbilder I på Q^T. Kravet (1) h: I -på → X/têT/(S;t) er derfor svakere enn kravet (2) h: I - på →Q^T.

Vi skal nå vise det følgende teorem som i visse henseende er analogt med Teorem 12.4.

Teorem 12.8 Anta M= <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Da har man at
(1) h: I - på→ X/têT/(S,t)
holder hvis og bare hvis man har:
(2) (Ag)(gêX/têT/(Ekv(E;t,I)) → Ω/têT/(g(t)) ≠ ø)

Vi minner om at E;t, der têT, er definert ved
E;t = Mg(<w1,w2>: w1,w2êI & h(w1);t = h(w2);t)

Bevis: (A) Vi viser først at (1) impliserer (2). Anta derfor (1) h: I -(1-1,på)→ X/têT/(S,t). Anta for vilkårlig g at (2) gêX/têT/(Ekv(E;t,I)). Da har vi i lys av definisjonen av kryssprodukt: (3) Func(g) & Dom(g)=T og (3.1) (At)(têT → g(t) êEkv(E;t,I)). Fra forutsetningene i satsen og Teorem 12.5 følger:
(4) (At)(têI → Ekv(E;t,I) = Mg(u(a,t): aêS;t))
Fra (3.1) og (4) har vi derfor:
(5) (At)(têT → g(t)êMg(u(a,t): aêS;t))
Fra dette følger så i sin tur:
(6) (At)(têT → (Ea)(aêS;t & g(t) = u(a,t)))

Fra (6) kan vi ved hjelp av utvalgsaksiomet slutte at det finnes f slik at:

(7) fêQ^T og

(8) (At)(têT→ f(t)êS;t & g(t) = u(f(t),t))

Fra det siste følger (9) (At)(têT → f(t)êS;t) som sammen med (7) gir en (10) fêX/têT/(S;t). Siden (1) holder, dvs. at h avbilder I på X/têT/(S;t) følger det at det finnes w0 slik at

(11) w0êI & h(w0) = f. Fra den siste konjunkten i (11) følger:

(12) (At)(têT → h(w0);t = f(t))

Det vil nå være tilstrekkelig å bevise:

(+) (Ew)(wêI & (At)(têT → wêg(t)))

Vi har at w0êI. Anta for vilkårlig t at (13) têT. Ved hjelp av (8) kan vi da slutte: (14) g(t) = u(f(t),t) Fra (12) og (13) har vi h(w0);t = f(t) og derfor ved hjelp av definisjonen av u at (15) w0êu(f(t),t). Fra dette og (14) følger w0êG(t). Siden t var vilkårlig element slik at (13) har vi vist: (At)(têT → w0êg(t)). Dette og (11) viser at (+) holder. Vi har derfor at Ω/têT/(g(t)) ≠ø. Vi har dermed bevist at formel (1) i teoremet impliserer formel (2).

(B) Det er nødvendig å vise at også den andre halvdelen av satsen holder. Anta

(1) Ag)(gêX/têT/(Ekv(E;t,I)) → Ω/têT/(g(t)) ≠ ø)

Siden M er en tilstandsstruktur har vi at (2) h: I → Q^T. Det er nødvendig å vise:

(+) h: I → X/têT/(S;t) , med andre ord at (3) Rgn(h) Inkl X/têT/(S;t). Anta derfor at (4) xêRgn(h). Da har vi at det finnes w der (5) wêI & h(w) = x & xêQ^T. La t være et vilårlig element i T, ie. (6) têT. Det vil da være nok å vise at x(t) êS;t. Fra (5) følger (7) h(w);t = x(t) êQ. Da har vi ved hjelp av (5) og (7) at

x(t)êQ & (Ew)(wêI & h(w);t = x(t)). Det følger ved hjelp av definisjonen av S;t at x(t)êS;t. Vi har derfor xêX/têT/(S;t) og følgelig at (+) holder

Det er imidlertid også nødvendig å vise at h avbilder I på X/têT/(S;t). Anta derfor for vilkårlig f at (8) fêX/têT/(S,t). Det er nødvendig å vise: (9) (Ew)(wêI & h(w)=f). Definer nå en funksjon g ved å sette (10) g(t) = u(f(t),t) for alle têT. Anta nå for vilkårlig t at (11) têT. Fra dette, (8) og definisjonen av kryssprodukt følger (12) f(t)êS;t. Da har vi trivielt: (13) f(t)êS;t & u(f(t),t) = u(f(t),t). Herav

(14) (Ea)(aêS;t & u(f(t),t) = u(a,t)). Det følger at (15) u(f(t),t) êMg(u(a,t): aêS;t) Fra (10) og (15) har vi da (16) g(t) êMg(u(a,t): aêS;t) Siden t var et vilkårlig objekt slik at (11) har vi bevist:

(17) (At)(têT → g(t)êMg(u(a,t): aêS;t))

Siden M er en tilstandsstruktur kan vi da ved hjelp av Teorem 12.5 slutte:

(18) (At)(têT → g(t)êEkv(E;t,I))

Fra dette gølger gê X/têT/(Ekv(E;t,I)) som sammen med formel (2) i teoremet impliserer

(19) Ω/têT/(g(t)) ≠ ø

Det må da finnes w0 slik at (20) (At)(têT → w0êg(t)). Siden M er en tilstandsstruktur har vi per definisjon at T≠ø og derfor at det finnes t0êT. Det følger ved hjelp av (20) at w0êg(t0), og ved hjelp av (18) at g(t0) ê Ekv(E;(t0),I). Siden Ekv(E;(t0), I) Inkl I har vi derfor (21) w0êI. Fra (20) og den definisjonen vi har gitt av g følger:

(22) (At)(têT → w0êu(f(t),t)). Herav har vi ved hjelp av definisjonen av u:

(23) (At)(têT → h(w0);t = f(t)). Dette impliserer (24) h(w0) =f.

Fra (21) og (24) følger: (Ew)(wêI & h(w) = f). Sien f var et vilkårlig element i X/têT/(S;t) følger at h avbilder I *på* X/têT/(S;t).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Satsen ovenfor er i og for seg interessant nok, men det er mulig å vise en sats som ikke bare angir en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at h avbilder I på X/têT/(S,t)), men som også angir en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at h avbilder I en-entydig og på X/têT/(S;t). Det dreier seg om det følgende teorem som er analogt med Teorem 12.4:

Teorem 12.9 Anta M= <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Da har man at
(i) h: I - (1-1,på)→ X/têT/(S,t)
holder hvis og bare hvis man har:
(ii) (Ag)(gêX/têT/(Ekv(E;t,I)) → (E!w)(wêI & wêΩ/têT/(g(t))))

Beviset for denne påstanden har en struktur som ligner svært på den til det foregående teorem. Det kan derfor virke unødvendig å gi det helt detaljert. Vi skal likevel gjøre dette for fullstendighetens skyld. Vi minner også for ordens skyld om at E;t fremdeles er definert på samme måte som i forbindelse med Teorem 12.8

Bevis: (A) Vi viser først at (i) impliserer (ii). Anta (1) h: I - (1-1,på)→ X/têT/(S,t). Anta for vilkårlig g at (2) gêX/têT/(Ekv(E;t,I)). Fra (2) kan man slutte at
(3) Func(g) & Dom(g) = T og dessuten:
(3.1) (At)(têT → g(t)êEkv(E;t, I)
Fra forutsetningen i satsen og Teorem 12.5 følger:
(4) (At)(têT → Ekv(E;t,I) = Mg(u(a,t): aêS;t).
Fra (3.1) og (4) kan vi slutte:
(5) (At)(têT → g(t) ê Mg(u(a,t): aêS;t). Fra dette følger så:
(6) (At)(têT → (Ea)(aêS;t & g(t) = u(a,t))
Fra (6) kan vi så ved hjelp av utvalgsaksiomet slutte at det finnes en f der:
(7) fêQ^T og
(8) (At)(têT → f(t)êS;t & g(t) = u(f(t),t))
Fra det siste følger (9) (At)(têT → f(t)êS;t) som sammen med (7) gir en
(10) fêX/têT/(S;t). Fra dette og (1) kan vi så slutte
(11) (E!w)(wêI & h(w) = f) Fra dette kan man slutte at det finnes w0 der
(11.1) w0êI & h(w0) =f Herav kan man så i lys av (7) slutte:
(12) (At)(têT → h(w0);t = f(t))
Det vil nå være tilstrekkelig å bevise:
(+) (E!w)(wêI & (At)(têT → wêg(t))
Vi har at w0êI. Anta for vikårlig t at (13) têT. Ved hjelp av (8) følger herav:
(14) g(t) = u(f(t),t). Men fra (12) og (13) har vi f(t) = h(w0);t og derfor ved hjelp av definisjonen av u at w0êu(f(t),t). I lys av (14) kan vi da slutte at w0êg(t). Siden t var et vilkårlig element i T har vi (At)(têT → w0êg(t)). Vi har derfor vist:
(15) w0êI & (At)(têT → w0êg(t)).
Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes w1 der:
(16) w1≠ w0 & w1êI & (At)(têT → w1êg(t))
Fra (8) og den andre konjunkten i (16) følger:
(17) (At)(têT → w1êu(f(t),t)). Herav har man så (At)(têT → h(w1);t = f(t)). Dette impliserer i sin tur at h(w1) = f. Men fra dette og (11.1) kan man slutte h(w1)=h(w0). Siden h imidlertid per hypotese er en-entydig har vi da w0=w1. Dette strider mot den første konjunkten i (16). Vi kan derfor slutte at (E!w)(wêI & (At)(têT → wêg(t)). Med andre ord har vi at (E!w)(wêI & wêΩ/têT/(g(t))). Dette viser at (ii) holder. dermed har vi bevist den

ene halvdelen av satsen.

(B) Anta nå på den annen side at (ii) holder, med andre ord at

(1) (Ag)(gêX/têT/(Ekv(E;t,I)) → (E!w)(wêI & wêΩ/têT/(g(t))))

Det er nødvendig å vise at (i) holder. For dette formål vil det være tilstrekkelig å bevise:

(2.1) h: I - på → X/têT/(S;t)

(2.2) h: I - (1-1) → X/têT/(S;t)

Fra (1) følger (3) (Ag)(gêX/têT/(Ekv(E;t,I)) → (Ew)(wêΩ/têT/(g(t)))) Fra dette, forutsetningene i satsen og Teorem 12.8 følger (2.1). Det gjenstår derfor bare å vise at (2.2) holder.

Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes w1 og w2 slik at

(4) w1,w2êI & w1≠ w2 & h(w1) = h(w2)

Vi skal først vise (5) h: I → X/têT/(S;t). Siden M er en tilstandsstruktur har vi åpenbart (6) h: I → Q^T. Anta for vilkårlig w at (7) wêI, For å vise at (5) holder er det tilstrekkelig å godtgjøre at h(w)êX/têT/(S;t). Fra (6) og (7) følger (8) h(w)êQ^T. La t være et vilkårlig element der vi har (9) têT. Fra (8) og (9) følger h(w);têQ. Da finnes det a slik at (11) h(w);t= a & aêQ Fra (7) og (11) kan man slutte (12) aêQ & wêI & h(w);t =a. Herav følger (13) aêQ & (Ew)(wêI & h(w);t =a). Fra dette og definisjonen av S;t har vi (14) aêS;t, og derfor ved hjelp av (11): h(w);têS;t. Siden t var vilkårlig har vi vist

(15) (At)(têT → h(w);têS;t). Men Func(h(w) og Dom(h(w))= T. Det følger at h(w)êX/têT/(S;t). Dermed har vi bevist at (5) holder.

I lys av (4) og (5) må det finnes en f slik at (16) fêX/têT/(S;t) & h(w1) = f = h(w2). Definer nå g ved: (17) g= λ/têT/(u(f(t),t)). På samme måte som i beviset for Teorem 12.8 kan vi da utlede: (18) (At)(têT → g(t)êEkv(E;t,t)) og derfor at

(19) gêX/têT/(Ekv(E;t,I))

Fra dette og (1) følge da (20) (E!w)(wêI & wêΩ/têT/(g(t)). Herav:

(21) (E!w)(wêI & (At)(têT → wêg(t)). Da ved hjelp av definisjonen av g:

(22) (E!w)(wêI & (At)(têT → wêu(f(t),t))

Fra (22) kan man i sin tur slutte ved hjelp av definisjonen av u:

(23) (E!w)(wêI & (At)(têT → h(w);t = f(t))

Men fra dette følger (E!w)(wêI & h(w) =f). Dette strider åpenbart mot (4). Dette viser at (2.2) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

§13 Om utsagnsmengder assosiert med tilstandsstrukturer.

Før vi presenterer de viktigste satsene vi skal ta for oss i dette avsnittet er det nødvendig å innføre endel begrepsdannelser. Ekvivalensrelasjonen E;t der têT, er ganske spesiell. Den innbærer at to verdener er ekvivalente dersom de totalprosessene som foreligger realisert i dem sammen faller ved tidspunktet t. Det er mulig å innføre et knippe av ekvivalensrelasjoner som er mer omfattende. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 13.1 Anta M = <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Da er E;c der c≠ø & c Inkl T definert ved:

E;c = Mg(<w1,w2>: w1,w2êI & (At)(têc → h(w1);t = h(w2);t))

Er c en delmengde av T skal vi kalle c for et tidsområde. Vi skal også tillate oss å kalle den totalprosessen som foreligger realisert i verdenen w, h(w), for historien til verdenen w. Er c et

tidsområde og w1, w2 verdener kan man si at de har samme historie i dette tidsområdet c dersom h(w1);t = h(w2);t for alle têc. I lys av dette kan man si at relasjon E;c representerer historisk identitet mellom to verdener i tidsområdet c. Det skulle være åpenbart på basis av denne definisjonen at E;c er en ekvivalensrelasjon over I

Vår neste definisjon angår noe helt annet. Anta I er mengden av mulige verdener. Et utsagn vil da være sannt i noen av disse verdenene og usant i andre. Antar vi at ethvert utsagn enten er sant eller usant i enhver verden vil ethvert utsagn dele mengden av mulige verdener i to, nemlig i en mengde som er mengden av alle de verdener hvor utsagnet er sant og i en annen mengde som er disjunkt som er mengden av alle de verdener hvor utsagnet er usant. Det er derfor ikke noe prinsipielt i veien for å identifisere utsagn med delmengder av mulige verdener. Vi skal i det følgende operere med en slags generalisering av dette utsagnsbegrep. Vi tar nå ikke utgangspunkt i mengden med mulige verdener I, men en partisjon X av I. Mengden av alle de utsagnene vi får når man summerer sammen elementene i X på alle mulige måter betegner vi med U(X).

Den formelle definisjonen er denne

Definisjon 13.2 Anta Part(X,I) der I er en ikke-tom mengde. Da definerer vi U(X), utsagnsmengden bestemt av partisjonen X, ved:

$U(X) = Mg(u: u \hat{e} Pt(I) \ \& \ (Ea)(a \hat{e} Pt(X) \ \& \ u = UN(a))$

Anta X er en mengde. Da er mengden av utsagn over X ikke noe annet en potensmengden til X, det vil si Pt(X). Er nå Δ en mengde av utsagn ønsker vi å definere hva som menes med at den er strengt uavhengig. Intuitivt innebærer dette at intet utsagn i mengden eller dets negasjon kan utledes fra noen andre utsagn utsagn i mengden. Det er ikke så vabnskelig å se at dette innebærer at dersom man tar en vilkårlig delmengde Γ av Δ så skal det finnes en verden w der alle utsagnene i Γ er sanne og hvor negasjonen av alle utsagnene i Δ-Γ er usanne. Dette siste er innholdet i den følgende definisjon:

Definisjon 13.3 Anta X er en ikke-tom mengde og at Δ Inkl Pt(X). Da kalles Δ for strengt uavhengig, i symboler SInd(Δ) hvis og bare hvis Δ oppfyller følgende to krav:

(i) $\Delta \neq \emptyset$

(ii) $(A\Gamma)(\Gamma \text{ Inkl } \Delta \rightarrow (Ew)(w \hat{e} X \ \& \ (Au)(u \hat{e} \Gamma \rightarrow w \hat{e} u) \ \& \ (Au)(u \hat{e} (\Delta - \Gamma) \rightarrow w \hat{e} (X-u))))$

Teorem 13.4 Anta X er en ikke-tom mengde som utelukkende inneholder funksjoner, med andre ord skal det være slik at $X \neq \emptyset$ & $(Af)(f \hat{e} X \rightarrow Func(f))$. Anta for alle f,gêX at dersom $f \neq g$ så har man at $Dom(f) \Omega Dom(g) = \emptyset$. Gitt disse forutsetningene gjelder:

(i) Func(UN(X))

(ii) Dom(UN(X)) =UN/fêX/(Dom(f))

(iii) $f \hat{e} X \ \& \ z \hat{e} Dom(f) \rightarrow (UN(X))(z) = f(z)$

Bevis: *Ad (i)*: Anta (1) <x,y1>, <x,y2> êUN(X). Da må det finnes f1,f2 slik at (2) f1,f2êX & (3) <x,y2>êf1 & <x,y2>êf2. Det følger fra (3) at (4) xêDom(f1) & xêDom(f2). Vi skiller mellom to tilfelle. Tilfelle (i): f1=f2. I så f har fall har vi ved hjelp av (3) at <x,y1>,<x,y2>êf1. Siden f1 er er med i X og derfor er en funksjon følger dt at y1=y2. Tilfelle (ii): f1≠f2. Da har vi ved hjelp av forutsetningene at

Dom(f1)Ω Dom(f2) =ø. Men dette er umulig ifølge (4). Dette tilfelle er derfor utelukket.
Det følger at y1=y2. Dette viser at UN(X) er en funksjon.

Ad (ii): Anta for vilkårlig x at xêDom(UN(X)). Da finnes det y slik at (5) <x,y>êUN(X). Fra dette følger at det finnes f slik at (6) fêX & Func(f) & <x,y>êf. Da har vi at (7) xêDom(f), og derfor i lys av (6) at xêUN/fêX/(Dom(f)). Dette viser inklusjonen mot høyre i punkt (ii). For å vise inklusjonen mot venstre, anta først at xêUN/fêX/(Dom(f)) for vilkårlig x. Da må det finnes f slik at (8) fêX & xêDom(f). Fra den siste konjunkten i (8) følger at det finnes y der (9) <x,y>êf. Fra den første konjunkten i (8) følger f Inkl UN(X) og derfor i lys av (9) at (10) <x,y> ê UN(X). Herav følger xêDom(UN(X)). Dette viser at punkt (ii) i satsen holdet.

Ad (iii): Anta (11) fêX og dessuten (12) zêDom(f). Fra (12) følger det at det finnes y slik at (13) <z,y>êf. Fra (11) følger f Inkl UN(X). Dette og (13) impliserer (14) <z,y>êUN(X). Fra (13) og (14) følger y= f(z) & y = (UN(X))(x) siden f, såvel som UN(X), er funksjoner. Det følger at (UN(X))(z) = f(z)
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 13.5 Anta M = <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta têT. Da finnes det en en-entydig avbildning ξ(t) der
(i) ξ(t) : Ekv(E;t,I) -(1-1,på)→ S;t og
(ii) (Ax)(xêEkv(E;t,I) → x = u(ξ(t)(x),t))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. La têT. Vi har at (1) Ekv(E;t,I) er en partisjon av I. Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan vi da slutte at det finnes en funksjon φ der man har: (2) Func(φ) og (3) (Ax)(xêEkv(E;t,I) → φ(x)êx). Definer nå en funksjon ξ ved å sette:
(4) ξ(t) = λ/xêEkv(E;t,I)/(h(φ(x));t)
Man bør huske på dersom xêEkv(E;t,I) har man at x Inkl I og derfor at φ(x)êx Inkl I. I lys av definisjonen (4) skulle det være klart at (5) Dom(ξ(t)) = Ekv(E;t,I). Det skulle også være at vi har (5.1) Func(ξ(t)). Vi må imidlertid vise at ξ(t) er en-entydig. Anta derfor at (6) x,yêEkv(E;t,I) og at (7) x≠y. Siden Ekv(E;t,I) er en partisjon av I har vi at x,yêPt(I), og siden x≠y følger det at (8) xΩy =ø. Fra (6), (8) og (3) følger at (9) φ(x)êx & φ(y)êy og derfor (10) φ(x)≠φ(y). Siden x,y Inkl I følger det også at (11) φ(x),φ(y)êI. Anta for reduktio ad absurdum at (11.1) h(φ(x));t = h(φ(y));t . Siden φ(x)êI & φ(x)êx & xêEkv(E;t,I) har vi at (12) x = Mg(w': w'êI & <w',φ(x)>êE;t). Fra (11.1) og definisjonen av E;t følger at <φ(x), φ(y)>êE;t og derfor at <φ(y),φ(x)>êE;t. Fra dette og (12) følger φ(y)êx. Men φ(y)êy & xΩy=ø. Dette er umulig. Det følger derfor at (11.1) ikke holder. Vi kan derfor slutte at (13) (ξ(t))(x) = h(φ(x));t ≠ h(φ(y));t = (ξ(t))(y). Dette viser at ξ(t) er en-entydig.

Nå har vi at desom xêEkv(E;t,I) så har vi φ(x)êx Inkl I. Vi har videre at h(φ(x));têQ og derfor at h(φ(x));t = a & aêQ & φ(x)êI for noe a. Det følger at

h(φ(x));têQ & (Ew)(wêI & h(w);t = h(φ(x);t). Fra dette og definisjonen av S;t kan man slutte at h(φ(x));t êS;t og derfor at ξ(t)(x)êS;t. Vi har derfor at Rgn(ξ(t)) Inkl S;t.

Det må også bevises at ξ(t) er på S;t. Anta derfor for vilkårlig a at (14) aêS;t. Da har vi i lys av definisjonen v S;t at det finnes w slik at (15) wêI & h(w);t =a. Definer x0 ved: (16) x0 = Mg(w': w'êI & h(w');t = h(w),t). Man har da x0 = Mg(w': w'êI & <w',w>êE;t). det følger at (17) x0êEkv(E;t,t) siden wêI. Nå har vi i lys av (3) at φ(x0)êx0. Fra dette og (16) følger: h(φ(x0));t = h(w);t. Fra dette og (15) følger så h(φ(x0));t =a og derfor at

$\xi(t)(x0) = a$. Dette og (17) impliserer (Ex)(xêEkv(E;t,I) & $\xi(t)(x) = a$). Dette viser at $\xi(t)$ avbilder Ekv(E;t,I) på S;t.

Det gjenstår å vise at: (18) (Ax)(xêEkv(E;t,I) → x = u($\xi(t)(x)$,t). Anta derfor for vilkårlig x at (19) xêEkv(E;t,I). Da har vi at det finnes w0 der:

(20) w0êI & x = Mg(w': w'êI & h(w');t = h(w0);t)

Nå har man ved hjelp av definisjonen av u at

(21) u($\xi(t)(x)$,t) = Mg(w: wêI & h(w);t = $\xi(t)(x)$)

Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise:

(22) Mg(w': w'êI & h(w');t = h(w0);t) = Mg(w: wêI & h(w);t = $\xi(t)(x)$)

Anta derfor for vilkårlig w' at (23) w'êI & h(w');t = h(w0);t. Siden $\varphi(x)$êx har vi ved hjelp av (20) at h($\varphi(x)$);t = h(w0);t. Fra dette og (23) følger ved hjelp av definisjonen av $\xi(t)$ at h(w');t = $\xi(t)(x)$ og derfor at w'ê Mg(w: wêI & h(w);t = $\xi(t)(x)$)

Har man på den annen side, for vilkårlig w', at w'êMg(w: wêI & h(w);t = $\xi(t)(x)$) følger (24) w'êI & h(w');t = $\xi(t)(x)$. Siden $\varphi(x)$êx har man ved hjelp av (20) at h($\varphi(x)$);t = h(w0);t. I lys av definisjonen av $\xi(t)$ har vi $\xi(t)(x)$ = h($\varphi(x)$);t og derfor at $\xi(t)(x)$ = h(w0);t. Dette og (24) impliserer h(w');t = h(w0);t og derfor w'êMg(w': w'êI & h(w');t = h(w0);t). Dette viser at (22), og derfor (18), holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 13.6 M = <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta π er en partisjon av T og at x,yêπ & x≠y. Anta f1êX/têx/(S;t) og at f2ê X/têy/(S;t). Gitt disse forutsetningene finnes det en funksjon gê X/têT/(S;t) slik at

(i) (At)(têx → g(t) = f1(t)) og

(ii) (At)(têy → g(t) = f2(t))

Bevis: Vi skal først vise at (1) (At)(têT → S;t ≠ø). I lys av definisjonen av S;t vil det være tilstrekkelig å bevise:

(2) (At)(têT → Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w);t =a)) ≠ø)

Siden M er en tilstandsstruktur har vi (3) h: I → Q^T. Anta for vilkårlig t at (4) têT. Siden M er en tilstandsstruktur er I≠ø. Dette innebærer at det finnes { der (5) w0êI. Fra dette og (3) følger at h(w0)êQ^T. Fra dette i sin tur følger at (6) Func(h(w0)) og (7) Dom(h(w0)) = T & Rgn(h(w0) Inkl Q. Siden têT har vi ved hjelp av (7) at (8) têDom(h(w0)). Fra dette følger i sin tur at (9) <t,a>êh(w0) for noe a. Siden h(w0) er en funksjon kan vi da slutte at (10) h(w0);t = a. Fra dette og (5) følger:

(11) (Ew)(wêI & h(w);t = a). Fra (7) og (9) følger (12) aêQ . Fra (11) og (12) har vi så det vi ønsker, nemlig: Mg(a: aêQ & (Ew)(wêI & h(w);t =a)) ≠ø. Dette viser at (2), og derfor (1), holder.

Fra (1) følger at (13) (At)(tê(T - (xUy)) → S;t≠ø)

Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man da slutte at det finnes en funksjon f3 slik at

(14.1) Func(f3)

(14.2) Dom(f3) = T- (xUy)

(14.4) (At)(têT → f3(t)êS;t)

Fra dette følger at (15) f3êX/tê(T-(xUy))/(S;t). Definer nå g ved (16) g=U{f1,f2,f3}. Vi har åpenbart da, om vi setter Y = {f1,f2,f3}, at Y er en mengde med funksjoner. Videre skulle det være klart at Dom(g) = T, og at domenene til alle funksjonene i Y er disjunkte. Ved hjelp av Teorem 13.4 kan man derfor slutte, siden f1,f2êY og Dom(f1)=x og Dom(f2)=y at

(17) (At)(têx → g(t) = f1(t))

(18) (At)(têy → g(t) = f2(t))

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Det er mulig å bevise en sats som er mer generell enn Teorem 13.5. Vi trenger denne satsen i beviset for vårt hovedresultat, Teorem 13.10 nedenfor.

Teorem 13.7 Anta M= <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta videre:
h: I - på → X/têT/(S;t)
Anta C Inkl T & C≠ø. Da finnes det en en-entydig avbildning ξ;C med følgende egenskaper:
(i) ξ;C : Ekv(E;C,I) -(1-1,på) → X/têC/(S;t)
(ii) (Ax)(xêEkv(E;C, I) → x= Ω/têC/(u((ξ;C(x));t, t))

Bevis: Vi har at (1) Ekv(E;t,I) er en partisjon av I. Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan vi da slutte at det finnes en funksjon φ slik at (2) Func(φ) og (3) (Ax)(xêEkv(E;C,I) → φ(x)êx). Vi definerer funksjonen ξ;C ved å sette:
(4) ξ;C = λ/xêEkv(E;C,I)/(λ/têC/(h(φ(x));t))
Fra (4) fremgår det at (5) Dom(ξ;C) = Ekv(E;C,I). Det skulle også være klart at ξ;C er en funksjon. Med andre ord har vi (6) Func(ξ;C). Vi må imidlertid vise tre ting, nemlig at ξ;C er en-entydig, at domenet er inkludert i X/têC/(S;t) og at ξ;C er på X/têC/(S;t). L oss starte med det første, nemlig at ξ;C er en-entydig.

Anta derfor for vilkårlige x,y at (6.1) x,yêEkv(E;C,I) og at (7) x≠y. Siden Ekv(E;C, I) er en partisjon av I har vi ved hjelp av (6.1) g (7) at (8) xΩy =ø. Fra (6.1) og (3) har vi at (9) φ(x)êx & φ(y)êy. Fra dette og (8) følger derfor (10) φ(x) ≠φ(y). Vi bemerker også at siden x,y Inkl I følger at (11) φ(x), φ(y)êI.

Anta nå for reduktio ad absurdum at (12) ξ;C (x) = ξ;C(y). Fra dette og definisjonen av ξ;C følger: (13) λ/têC/(h(φ(x));t) = λ/têC/(h(φ(y));t). I sin tur følger fra dette:
(14) (At)(têT → h(φ(x)); t = h(φ(y));t). ved hjelp av definisjonen av E;C kan man fra dette slutte at (15) <φ(x), φ(y)>êE;C. Siden φ(x)êx & xêEkv(E;C,I) har vi at x = Mg(w': w'êI & <w',φ(x)>ê E;C) Fra dette, (11) og (15) følger φ(y)êx. Men fra dette og det at φ(y)êy følger at xΩy≠ ø. Dette strider mot (8). Det følger at ξ;C (x) ≠ ξ;C(y). Dette viser at ξ;C er en-entydig.

Vi må vise at Rgn(ξ;C) Inkl X/têC/(S;t). Anta for vilkårlig f at (16) fêRgn(ξ;C). Da må vi, i lys av definisjonen av ξ;C, ha at f=λ/têC/(h(φ(x));t) for en eller annen xêEKv(E;C,I). Det må åpenbart være tilfelle at (17) Func(f) & Dom(f) = C. Er têC har vi at h(φ(x));têQ og derfor at h(φ(x));t = a for noe aêQ. Siden φ(x)êI har vi derfor:
(Ew)(wêI & h(w);t = h(φ(x));t) & h(φ(x));têQ. Fra dette følger h(φ(x));têS;t. Nå var t et vilkårlig element i C. Derfor har vi at (At)(têC → h(φ(x));t êS;t). Sammen med (17) impliserer dette (18) fêX/têC/S;t.

Det må også bevises at ξ;C er *på* X/têC/(S;t). Anta derfor for vilkårlig f at (19) fêX/têC/(S;t). da har vi i lys av den definisjonen av kryssprodukt som vi tidligere har gitt at (20) Func(f) & Dom(f)=C & (At)(têC → f(t)êS;t). Ved hjelp av Teorem 13.6 kan man da utlede at det finnes en funksjon g der gêX/têT/(S;t) slik at
(21) (At)(têC → g(t) =f(t)). Siden h etter forutsetningene er på X/têT/(S;t) har vi at det finnes w0êI slik at (22) h(w0)=g. Siden Ekv(E;C,I) er en partisjon av I må det finnes x slik at (23) xêEkv(E;C,I) og (24) w0êx. Videre har vi at φ(x)êx. Fra (21) og (22) kan man slutte: (25.1) (At)(têT → h(w0);t = g(t) = f(t)) Siden w0êx & φ(x)êx & xêEkv(E;C, I) har vi ved hjelp av definisjonen av E;C at (25.2) (At)(têC → h(w0);t = h(φ(x));t). Fra dette og (25.1) følger ξ;C(x) = λ/têC/(h(φ(x));t) =f. Dette viser at ξ;C avbilder Ekv(E;C,I) på

X/têc/(S;t).

Det gjenstar å vise punkt (ii) i satsen. Anta derfor (26) at xêEKv(E;C,I). Da finnes det w0êI slik at (27) x= Mg(w': w'êI & (At)(têC → h(w');t = h(w0);t)). La definere a0 ved: a0 = Ω/têC/(u((ξ;(x));t,t). Da har vi:

(28) a0 = Mg(w: wêI & (At)(têC → h(w);t = (ξ;C(x));t)) =

Mg(w: wêI & (At)(têC → h(w);t = (h(φ(x));t))

Vi må vise at (29) x=a0.

(I) Anta for vilkårlig w at wêa0. Da har vi fra (28) at

(29) wêI & (At)(têC → h(w);t = (h(φ(x));t). Nå har vi φ(x)êx og derfor ved hjelp av (27) at (30) (At)(têC → h(φ(x));t = h(w0);t). Fra (29) og (30) kan vi slutte

(At)(têC → h(w);t = h(w0);t). Fra dette, den første konjunkten i (29) og (27) følger at wêx. Dette viser at inklusjonen mot venstre i (29) holder.

(II) Anta på den annen side at wêx for vilkårlig w. Fra dette og (27) kan vi da slutte: (31) wêI & (At)(têC → h(w);t = h(w0);t). Nå har vi φ(x)êx. Man kan derfor igjen ved hjelp av (27) slutte : (At)(têC → h(φ(x));t = h(w0);t). Fra dette og (31) følger: wêI & (At)(têC → h(w);t = h(φ(x));t). Herav kan vi sammen med (28) slutte at wêa0. Dermed har vi bevist at (29) holder og følgelig at x= Ω/têC/(u((ξ;(x));t,t).

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Teorem 13.8 Anta M = <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta h: I - på → X/têT/(S;t). Anta videre at t1,t2êT & t1≠t2. Sett per definisjon.

X1 = U(Ekv(E;(t1),I)) -{ø,I}

X2 = U(Ekv(E;(t2),I)) -{ø,I}

Gitt disse forutsetningene har man X1 Ω X2 =ø

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. For å vise at X1ΩX2 =ø er det tilstrekkelig å bevise (+) (Ax)(Ay)(xêX1 & yêX2 →

xΩy ≠ø & xΩ(-y)≠ø & (-x)Ωy ≠ø & (-x)Ω(-y)≠ø)

For anta for reduktio ad absurdum at X1ΩX2≠ø. Da ville det finnes noe x der xêX1 & xêX2. Ved hjelp av (+) ville vi da ha xΩ(-x)≠ø som er absurd. Det er derfor åpenbart tilstrekkelig å vise t (+) holder.

Anta derfor for vilkårlige x,y at (1) xêX1 & yêX2. Fra forutsetningene om X1 og X2 følger da at xêU(Ekv(E;(t1),I)) - {ø,I} og yêU(Ekv(E;(t2),I)) - {ø,I}. I lys av definisjonen av U(Ekv(E;t,I)) følger det da at det finnes a1 der

(2) a1 Inkl Ekv(E;(t1),I) & x= UN(a1)

Tilsvarende kan vi slutte at det må finnes noe b1 der man har:

(3) b1 Inkl Ekv(E;(t2),I) & y = UN(b1)

Vi kan ikke ha a1= EKv(E;(t1),I) for da har vi, siden Ekv(E;(t1),I) er en partisjon av I, x=UN(a1) = I. Men dette er ifølge forutsetningene utelukket. Heller ikke kan vi ha at a1=ø for i så fall ville x=UN(a1) = ø. Men også dette er utelukket om vi holder oss til forutsetningene i satsen. Tilsvarende betraktninger kan gjøres i forbindelse med b1. Vi har derfor

(2.1) a1 SInkl Ekv(E;(t1),I) & a1 ≠ ø & x = UN(a1)

(3.1) b1 SInkl Ekv(E;(t1),I) & b1 ≠ ø & x = UN(b1)

Fra (2.1) følger det at det finnes q1 og q2 slik at

(4) q1êa1 & q2 ê (Ekv(E;(t1),I) - a1)

Tilsvarende kan vi fra (3.1) slutte at det finnes s1,s2 slik at

(5) s1êb1 & s2ê(EKv(E;(t2),I) - b1)

Fra (2.1), (3.1), (4) og (5) følger:

(6) q1,q2êEkv(E;(t1),I) og

(7) s1,s2êEkv(E;(t2),I)

Fra (4) og (5) kan vi også slutte, siden Ekv(E;(ti),I) (i=1,2) er en partisjon av I, at det følgende holder:

(8) q1Ωq2=ø & s1Ωs2=ø

(9) qi ≠ ø (i=1,2) & si ≠ ø (i=1,2)

Dessuten fremgår det fra (2.1) - (9) at

(10) q1 Inkl x & q2 Inkl (I - x)

(11) s1 Inkl y & s2 Inkl (I -y)

Ved hjelp av Teorem 13.5 kan man slutte at det finnes to avbildninger ξ;(t1) og ξ;(t2) der vi har:

(12) ξ;(t1): Ekv(E;(t1),I) -(1-1, på) → S;(t1)

(13) ξ;(t2): Ekv(E;(t2),I) -(1-1, på) → S;(t2)

(a) Fra (6) og (12) følger:

(14) ξ;(t1)(q1) êS;(t1)

Tilsvarende har man fra (7) og (13)

(15) ξ;(t2)(s1) êS;(t2)

Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man nå slutte, siden <S;t>/têT/ er en samling ikke-tomme mengder, at det finnes en funksjon g1 der man har:

(16) g1êX/têT/(S;t) & g1(t1) = ξ;(t1)(q1) & g1(t2) = ξ;(t2)(s1)

Fra den første konjunkten og forusetningen om at h avbilder i på X/têT/(S;t) kan man slutte at det finnes w1 slik at (17) h(w1) = g1. Fra dette følger:

(18) h(w1);(t1) = ξ;(t1)(1)êS;(t1) og

(19(h(w1);(t2) = ξ;(t2)(s1) êS;(t2). Det følger da ved hjelp av det andre punktet i Teorem 13.5 at

w1êu(ξ;(t1)(q1),t1) = q1 Inkl x og

w2êu(ξ;(t2)(s1),t2) = s1 Inkl y. Fra dette følger at xΩy ≠ ø.

(b) Fra (6), (12) følger:

(20) ξ;(t1)(q1) êS;(t1)

Tilsvarende har man fra (7) og (13)

(21) ξ;(t2)(s2) êS;(t2)

Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man nå slutte, siden <S;t>/têT/ er en samling ikke-tomme mengder, at det finnes en funksjon g2 der man har:

(22) g2êX/têT/(S;t) & g2(t1) = ξ;(t1)(q1) & g2(t2) = ξ;(t2)(s2)

Fra den første konjunkten og forusetningen om at h avbilder i på X/têT/(S;t) kan man slutte at det finnes w2 slik at (17) h(w2) = g2. Fra dette følger:

(23) h(w2);(t1) = ξ;(t1)(q1)êS;(t1) og

(24) h(w2);(t2) = ξ;(t2)(s2) êS;(t2). Det følger da ved hjelp av det andre punktet i Teorem 13.5 at

(25.1) w2êu(ξ;(t1)(q1),t1) = q1 Inkl x og

(25.2) w2êu(ξ;(t2)(s2),t2) = s1 Inkl (I- y). (Jmf (11))

Fra dette følger at xΩ(-y) ≠ ø.

(c) Fra (6), (12) følger:

(26) ξ;(t1)(q2) êS;(t1)

Tilsvarende har man fra (7) og (13)

(27) ξ;(t2)(s1) êS;(t2)

Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man nå slutte, siden <S;t>/têT/ er en samling ikke-tomme mengder, at det finnes en funksjon g3 der man har:

(28) g3êX/têT/(S;t) & g3(t1) = ξ;(t1)(q2) & g3(t2) = ξ;(t2)(s1)

Fra den første konjunkten og forusetningen om at h avbilder i på X/têT/(S;t) kan man slutte at det finnes w3êI slik at (29) h(w3) = g3. Fra dette følger:

(29) h(w3);(t1) = ξ;(t1)(q2)êS;(t1) og

(30) h(w3);(t2) = ξ;(t2)(s1) êS;(t2). Det følger da ved hjelp av det andre punktet i Teorem 13.5 at

(30.1) w3êu(ξ;(t1)(q2),t1) = q2 Inkl (I- x) og

(30.2) w3êu(ξ;(t2)(s1),t2) = s1 Inkl y. (Jmf (10), (11))

Fra dette følger at (-x)Ωy ≠ ø.

(d) Fra (6), (12) følger:

(26) ξ;(t1)(q2) êS;(t1)

Tilsvarende har man fra (7) og (13)

(27) ξ;(t2)(s2) êS;(t2)

Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man nå slutte, siden <S;t>/têT/ er en samling ikke-tomme mengder, at det finnes en funksjon g4 der man har:

(28) g4êX/têT/(S;t) & g4(t1) = ξ;(t1)(q2) & g4(t2) = ξ;(t2)(s2)

Fra den første konjunkten og forusetningen om at h avbilder i på X/têT/(S;t) kan man slutte at det finnes w3êI slik at (29) h(w4) = g4. Fra dette følger:

(29) h(w4);(t1) = ξ;(t1)(q2)êS;(t1) og

(30) h(w4);(t2) = ξ;(t2)(s2) êS;(t2). Det følger da ved hjelp av det andre punktet i Teorem 13.5 at

(30.1) w4êu(ξ;(t1)(q2),t1) = q2 Inkl (I- x) og

(30.2) w4êu(ξ;(t2)(s2),t2) = s2 Inkl (I-y). (Jmf (10), (11))

Fra dette følger at (-x)Ω(-y) ≠ ø.

Fra et som nå er bevist under punktene (a) - (d) fremgår det at konsekventen i (+) holder gitt at xêX1 & yêX2. Dette viser at at (+) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 13.9 Anta M = <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta π er en partisjon av mengden av tidspunkter T. Anta videre at Δ Inkl π og at

(Ax)(xêΔ → G(x) ê X/têx/(S;t))

Gitt disse forutsetningene finnes det en funksjon gêX/têT/(S;t) med følgende egenskap:

(Ax)(xêΔ → (At)(têx → g(t) = G(x)(t)))

Bevis: Siden Δ Inkl π har vi selvfølgelig at π-Δ utgjør de resterende elementene i partisjonen π. Siden π dessuten er en partisjon av T følger det at UN(π-Δ) Inkl T og at

(1) UN(Δ) Ω UN(π-Δ) = ø. Dessuten har vi at:

(3) (Ax)(xêΔ → xΩUN(π-Δ) =ø

Siden UN(π-Δ) Inkl T og S;t er en ikke-tom menge for alle têT kan vi ved hjelp av utvalgsaksiomet slutte at det finnes f slik at:

(3.1) Func(f)

(3.2) Dom(f) = UN(π-Δ)
(3.3) (At)(tê UN(π-Δ) → f(t)êS;t)
Fra (3.1) - (3.3) kan man naturligvis slutte: fêX/têUN(π-Δ)/(S;t)
La oss nå per definisjon sette: (4) g = UN(Mg(G(x): xêΔ)) U {f}. Siden π er en partisjon og Δ Inkl π har vi at alle mengdene i Δ er inbyrdes disjunkte og at disse mengdene er disjunkte med Dom(f) = UN(π-Δ). Dette følger fra (3). Vi har også at de diverse G(x) der x gjennomløper Δ er funksjoner og at domene til disse funksjonene er innbyrdes disjunkte og at alle disse Dom(G(x)) der xêΔ er disjunkte med domenet til funksjonen f. Setter vi derfor Y = Mg(G(x): xêΔ) U {f} har vi ved hjelp av Teorem 13.4 at
(5) Func(g)
(6) Dom(g) = UN/hêY/(Dom(h)) = UN(Δ)UDom(f) = T
Dette følger siden π er en partisjon av T og π = ΔU(π-Δ) og Δ Inkl π. Videre har vi:
(7) (Ah)(hêMg(G(x): xêΔ) & têDom(h) → g(t) = h(t))
Anta nå at xêΔ. Da har vi G(x)êMg(G(y): yêΔ). Er da têx har vi têDom(G(x)) og derfor ved hjelp av (7) g(t)= G(x);t. Dette viser at
(8) (Ax)(xêΔ → (At)(têx →g(t)= G(x)(t)))
Det gjenstår imidlertid å gi et bevis for at gêX/têT/(S;t). I lys av den definisjonen vi tidligere har gitt av kryssproduktet til en mengdefamilie er det nødvendig å vise følgende tre ting:
(8.1) Fung(g)
(8.2) Dom(g) = T og
(8.3) (At)(têT → g(t)êS;t)
De to første av disse tre påstandene har vi allerede bevist. Vi behøver derfor bare å vise det siste. Anta derfor for vilkårlig t at têT. Vi må skille mellom to tilfelle:
Tilfelle (i): têUN(Δ). Da finnes xêΔ slik at têx. Siden xêΔ har vi da
(9) G(x)êX/têx/(S;t) direkte fra en av forutsetningene i satsen. Men da følger g(t)= G(x)(t)êS;t fra (8) og (9).
Tilfelle (ii): têUN(π-Δ). Da har vi têUN(π-Δ) = Dom(f). Da følger f(t)êS;t ved hjelp av (3.3). Men f Inkl g. Ved hjelp av Teorem 13.4 kan vi da slutte at g(t) =f(t)êS;t.
I begge tilfelle har vi g(t)êS;t. Det følger at (.3) holder og derfor at gêX/têT/(S;t). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. QED.

Det gjenstår nå å gi bevis for den følgende sats som er hovedresultatet i dette avsnittet.

Teorem 13.10 Anta M = <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur der
h: I - (på) → X/têT/(S;t)
Anta π er en partisjon av T og anta:
φ êX/cêπ/(U(Ekv(E;c,I)) - {ø,I})
Da har vi at Rgn(φ) er en strengt uavhengig utsagnsmengde, med andre ord SInd(Rgn(φ))

Bevis: Anta at (1) M = <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta videre (2) h : I - på→ X/têT/(S;t). Anta (3) π er en partisjon av mengden av tidspunkter i M, ie. T og anta (4) φêX/cêπ/(U(Ekv(E;c,I)) - {ø,I}).
Anta for vilkårlig c at (5) cêπ. Fra (4) følger:
(5.1) Dom(φ) = π & Func(φ). Dessuten
(5.2) (Ac)(cêπ → φ(c)ê (U(Ekv(E;c,I)) - {ø,I}))
Fra (5) og (5.2) kan man slutte:
(6) φ(c)ê (U(Ekv(E;c,I)) - {ø,I})
Fra (6) følger:

(7.1) φ(c)ê U(Ekv(E;c,I)) samt

(7.2) φ(c) ≠ ø & φ(c) ≠ I

Fra (7.1) og definisjonen av U(X), der det forutsettes at X er en partisjon av I, følger at det finnes d slik at

(8.1) φ(c) = UN(d) & d Inkl Ekv(E;c,I)

Siden φ(c)≠ø må vi ha (8.2) d ≠ ø. Siden φ(c) ≠ I og I = UN(Ekv(E;c,I) følger det fra (8.1) at (8.3) d SInkl Ekv(E;c, I). Fra (8.3) følger det at det må finnes f slik at

(8.4) fê(Ekv(E;c,I) - d) og fra (8.2) følger eksistensen av e der (8.5) eêd.

Sammenfattende har vi at dt finnes d, e og f slik at

(9) d SInkl Ekv(E;c,I) & eêd & fê(EkvE;c,I) - d) & e Inkl UN(d) =φ(c).

La oss forkorte (9) med H(d,e,f,c). Fra (9) følger da ved hjelp av denne definisjonen:

(10) Mg(<d,e,f>: H(d,e,f,c)) ≠ ø

Nå var c et vilkårlig element slik at (5) holdt. Det følger derfor at vi har vist:

(11) (Ac)(cêπ → Mg(<d,e,f>: H(d,e,f,c)) ≠ ø)

Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan vi da slutte at det finnes en utvalgsfunksjon Σ med de følgende egenskaper:

(12) Func(Σ) & Dom(Σ) = π

(13) (Ac)(cêπ → Σ(c) ê Mg(<d,e,f>: H(d,e,f,c)) ≠ ø))

Det følger fra (13) og definisjonen av fireplass-predikatet H at dersom cêπ har vi

(14) (Σ(c));1 SInkl Ekv(E;c,I) & (Σ(c));2ê (Σ(c));1
&(Σ(c));3ê(Ekv(E;c,I) - (Σ(c));1) & (Σ(c));2 Inkl UN((Σ(c));1) = φ(c)

Dette kan se kryptisk ut. man må imidlertid huske på at dersom x er et eller annet triple bruker vi (x);i (i=1,...,3) for å betegne den i-te komponenten i triplet. Siden Σ(c) er et triple vil derfor (Σ(c));1, (Σ(c));2 og (Σ(c));3 være henholdsvis den første, den andre og den tredje komponenten i triplet Σ(c).

La Δ være en vilkårlig mengde der vi har (15) Δ Inkl π. Vi definerer en funksjon Ψ;Δ ved å sette:

(16.1) Ψ;Δ(x) = (Σ(x));2 om xêΔ

(16.2) Ψ;Δ(x) = (Σ(x));3 om xê(π-Δ)

Er xê(π-Δ) ser man ved hjelp av (16.2) og (14) at Ψ;Δ(x) Ω φ(x) =ø. Er xêΔ ser man ved hjelp av (14) og (16.1) at Ψ;Δ(x) Inkl φ(x).

Fra (1) og (2) og Teorem 13.7 kan vi slutte at det for hvert xêπ finnes en funksjon ξ;x der man har:

(17.1) ξ;x : Ekv(E;x,I) -(1-1,på) → X/têx/(S;t) og

(17.2) (Ay)(yêEkv(E;x,I) → y= Ω/têx/(u(ξ;x(y);t,t))

Vi kan derfor definere en funksjon P;Δ ved:

(18) P;Δ(x) = ξ;x(Ψ;Δ(x)) om xêπ

Fra (17.1) og (18) følger:

(19) (Ax)(xêπ → P;Δ(x)ê X/têx/(S;t)

Fra (19) og Teorem 13.9, man setter Δ i dette teorem lik π, kan man da slutte at det finnes en funksjon g der vi har:

(20.1) gêX/têT/(S;t) og

(20.2) (Ax)(xêπ → (At)(têx → g(t)= P;Δ(x);t))

Siden gêX/têT/(S;t) har vi ved hjelp av (2) som sier at h avbilder I på X/têT/(S;t), at det må finnes w0 der:

(21) w0êI & h(w0)=g

Fra (20.2) og (21) følger:

(22) (Ax)xêπ → (At)(têx → h(w0);t = P;Δ(x);t))

Fra (17.2) og (18) kan man også slutte:

(23) $(Ax)(x\hat{e}\pi \rightarrow \Psi;\Delta(x) = \Omega/t\hat{e}x/(u(P;\Delta(x);t,t))$

Fra (22) og definisjonen av u(a,t) der aêQ og têT følger:

(24) $(Ax)(x\hat{e}\pi \rightarrow w0\hat{e}\ \Omega/t\hat{e}x/(u(P;\Delta(x);t,t))$

Fra (23) og (24) følger umiddelbart:

(25) $(Ax)(x\hat{e}\pi \rightarrow w0\hat{e}\Psi;\Delta(x))$

Fra (25) og definisjonen av Σ kan man slutte:

(26.1) $(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow w0\hat{e}\Psi;\Delta(x) = (\Sigma(x));2\ \text{Inkl}\ \varphi(x)$

(26.2) $(Ax)(x\hat{e}(\pi-\Delta) \rightarrow w0\hat{e}\Psi;\Delta(x) =$
$(\Sigma(x));3\ \text{Inkl}\ UN(Ekv(E;x,I) -(\Sigma(x));1) = I - \varphi(x)$

Det følger fra dette at:

(27) $(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow w0\hat{e}\varphi(x))$ og

(28) $(Ax)(x\hat{e}(\pi-\Delta) \rightarrow w0\hat{e}(I-\varphi(x)))$

Nå har vi hele tiden antatt at Δ var en vilkårlig dlmengde av π, ie. Δ Inkl π. (Jmf. (15)). Gitt denne antagelsen har vi så vist at det finnes w0 slik at (27) og (28) holder. Dette innebærer at vi har vist det følgende:

(29) $(A\Delta)(\Delta\hat{e}Pt(\pi) \rightarrow (Ew0)(w0\hat{e}I\ \&\ w0\hat{e}\Omega/x\hat{e}\Delta/(\varphi(x))\ \&$
$w0\hat{e}\ \Omega/x\hat{e}(\pi-\Delta)(I-\varphi(x))))$

Før vi avslutter beviset skal vi først vise at φ er en en-entydig funksjon, dernest skal vi godtgjøre at SInd(Rgn(φ)).

Anta (30) $x,y\hat{e}\pi$ og at (31) $x \neq y$. Set $\Delta = \{x\}$. Da har man $y\hat{e}\pi-\Delta$. Siden π er en partisjon av T har man fra (30) og (31) at (32) $x\Omega y = ø$. Fra (29) har vi at det finnes w0 der:

(33) $w0\hat{e}I\ \&\ w0\hat{e}\Omega/x\hat{e}\Delta/(\varphi(x))\ \&\ w0\hat{e}\ \Omega/x\hat{e}(\pi-\Delta)(I-\varphi(x))$

Siden $x\hat{e}\Delta$ har vi ved hjelp av (33) at (34) $w0\hat{e}\varphi(x)$. Siden $y\hat{e}(\pi-\Delta)$ ved hjelp av den tredje konjunkten i (33) at (35) $w0\hat{e}(I-\varphi(x))$. Hadde vi mot formodning hatt $\varphi(x)=\varphi(y)$ ville vi da ha hatt at $w0\hat{e}\varphi(x)$ og $w0\hat{e}(I-\varphi(x))$. Dette er åpenbart umulig. Det følger at φ er en-entydig.

Vi skal vise at (+) SInd(Rgn(φ)). Anta for vilkårlig Γ at (37) Γ Inkl Rgn(φ). Siden φ er en-entydig finnes det da $\Delta;0$ Inkl π = Dom(φ) slik at (38) $\varphi''(\Delta;0) = \Gamma$. Siden $\Delta;0$ Inkl π har vi ved hjelp av (29) at det finnes w0 der (39) $w0\hat{e}I$ og

(40) $(Ax)(x\hat{e}\Delta;0 \rightarrow w0\hat{e}\varphi(x))$

(41) $(Ax)(x\hat{e}(\pi-\Delta;0) \rightarrow w0\hat{e}(I-\varphi(x)))$

Er da $x\hat{e}\Gamma$ har vi ved hjelp av (38) at det finnes $y\hat{e}\Delta;0$ slik at $\varphi(y)=x$. Fra dette og (40) følger at $w0\hat{e}x$. Er $x\hat{e}(Rgn(\varphi)-\Gamma)$ har vi siden φ er en-entydig at det finnes y der $\varphi(y)=x$ & $y\hat{e}(\pi-\Delta;0)$. Fra dette og (41) følger $w0\hat{e}(I-x)$. Dette er hva vi ønsker. Dette viser at (+) holder.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Vi skal gi bevis for ytterligere noen teoremer om tilstandssstrukturer og uavhengige utsagnsmengder. Det er trolig mulig å bevise langt flere satser med noe dypere innholdom dette tema enn det vi har gjort. De følgende satser er derfor mer å regne som eksempler på hva man kan vise i denne forbindelse.

For den videre utviklingen er det hensiktsmessig å bevise den følgende sats som har karakter av hjelpesetning.

Teorem 13.11 Anta Part(X,I) og anta at a Inkl X. Da har vi:

$I - UN(a) = UN(X-a)$

Bevis: Anta (1) Part(X,I) og (2) a Inkl X

(a) Anta for vilkårlig w at (3) wê(I-UN(a)). Da har man at (4) wêI og (5) ¬(wêUNa)

Fra (1) og (4) følger det at det må finnes noe c slik at (6) wêc & cêX. Fra (5) følger: (7) (Ad)(dêa → ¬(wêd)). Fra (6) og (7) følger: ¬(cêa) og derfor ved hjelp av den andre konjunkten i (6) at cê(X-a). Men wêc. Derfor wêUN(X-a). Dette viser riktigheten av inklusjonen mot høyre i konsekventen i teoremet.

(b) Anta på den annen side, for vilkårlig w, at (7) wêUN(X-a). Da kan man slutte at det finnes c der (8) wêc & cê(X-a). Siden X er en partisjon av I og wêc & cêX har vi c Inkl I, og derfor wêI. Anta for reduktio ad absurdum at (10) wêUN(a). Da finnes d slik at (11) wêd & dêa.

Fra dette og (8) følger wêcΩd og derfor (12) cΩd=ø. Men dêa Inkl X og cêX. Siden X er en partisjon av I følger da fra (12) at c=d. Fra dette og (11) følger wêc som strider mot den siste konjunkten i (8). Det følger at ¬(wêUN(a)) og derfor at wê(I-UN(a)).

Dette viser at satsen holder. **QED.**

Teorem 13.12 Anta M = <I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur. Anta A og B er to ikke-tomme mengder og at Q = AxB. Anta videre at følgende holder:

(Af)(fêA^T → (Ag)(gêB^T → (Ew)(wêI &
(At)(têT →. (h(w);t));1 = f(t) & (h(w);t));2 = g(t))))

Definer relasjonene R1(t) og R2(t), for alle têT, ved:

R1(t) = Mg(<w1,w2>: w1,w2êI & (h(w1);t));1 = (h(w2);t));1)

R2(t) = Mg(<w1,w2>: w1,w2êI & (h(w1);t));2 = (h(w2);t));2)

Anta tilslutt at Δ;i Inkl U(Ekv(Ri(t),I)) om i=1,2 og at SInd(Δ;i) for i=1,2

Da har vi: SInd(Δ;1 U Δ;2)

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Det er nødvendig å gi bevis for at (1) SInd(Δ1 U Δ2). Dette innebærer at vi må bevise:

(2) (AΓ)(Γ Inkl (Δ1U Δ2) →
(Ew)(wêI & wêΩ(Γ) Ω ΩMg(Neg(y): yê((Δ1UΔ2) - Γ))))

Anta derfor for vilkårlig Γ at (3) Γ Inkl (Δ1 U Δ2). Sett per definisjon:

(4) X1 = ΓΩ Δ1 og

(5) X2 = ΓΩ Δ2

Da har vi i lys av (3) at (6) X1 U X2 = Γ og dessuten at (7) X1 Inkl Δ1 og (8) X2 Inkl Δ2. Siden vi etter forutsetningene har at SInd(Δ1) følger ved hjelp av definisjonen av SInd at det finnes w1 der følgene holder:

(9) w1êI & w1ê(Ω(X1) Ω ΩMg(Neg(y): yê(Δ1-X1)))

Dette innebærer i sin tur at følgende holder:

(10) (Au)(uêX1 → w1êu)

(11) (Au)(uê(Δ1-X1) → w1êNeg(u))

Siden w1êI og Ekv(R1(t),I) r en partisjon av I kan man slutte at det finnes c1 der:

(12) c1êEkv(R1(t),I) og

(13) w1êc1

Vi skal nå vise at følgende holder:

(14.1) (Au)(uêX1 → c1 Inkl u)

(14.2) (Au)(uê(Δ1-X1) → c1 Inkl Neg(u))

Vi tar først for oss (14.1): Anta for vilkårlig u at (14.3) uêX1 Nå har vi at X1 Inkl Δ1 Inkl U(Ekv(R1(t),I). Det følger derfor at uêU(Ekv(R1(t), I). Dette impliserer i sin tur at det finnes a slik at (14.4) a Inkl Ekv(R1(t),I) & u = UN(a). Fra (10) og (14.3) følger: w1êu. I lys av (14.4) har vi derfor w1êUN(a). Det følger at dt finnes c' slik at (14.5) w1êc' & c'êa. Fra dette og (13) kan man slutte w1 ê(c1Ω c'). Men siden c1,c' êEkv(R1(t),I) og Ekv(R1(t),I) er en partisjon av I har man at c1=c'. Fra (14.4) og (14.5) følger c' Inkl UN(a). Fra dette og (14.4) kan man slutt at c1Inkl UN(a) = u. Dette viser at (14.1) holder.

Vi viser så riktigheten av (14.2). Anta for vilkårlig u at (14.6) uê(Δ1-X1). Siden Δ1 Inkl U(Ekv(R1(t),I) har vi at (14.7) uê U(Ekv(R1(t),I) og derfor at det finnes a' slik at

(14.8) a' Inkl Ekv(R1(t),I) & u= UN(a'). Siden Ekv(R1(t),I) er en partisjon av I har vi ved hjelp av Teorem 13.11 og (14.8) at

(14.9) Neg(u) = I-u = I - UN(a') = UN(Ekv(R1(t),I) - a')

Videre har vi fra (11) at (14.10) w1êNeg(u). Fra dette og (14.9) følger at det finnes noe d der (14.11) w1êd & dê(Ekv(R1(t),I) -a'). Men w1êc1. Derfor kan vi slutte c1Ωd ≠ø. Siden Ekv(R1(t),I) er en partisjon av I har vi da d=c1. Fra (14.9), (14.11) og det at d= c1 følger

c1 Inkl UN(Ekv(R1(t),I) - a') = Neg(u).

Dette viser at (14.2) holder.

Siden w1êc1 ê Ekv(R1(t),I) har man

(15) c1 = Mg(w: wêI & <w,w1>êR1(t))

Dette impliserer ved hjelp av definisjonen av R1 som er gitt blandt forutsetningene i satsen:

(16) c1 = Mg(w: wêI & (h(w);t);1 = (h(w);t);2)

Siden w1êI & têT har vi at H(w1);t êAxB, og derfor at

(17) (h(w1);t);1êA. Det er åpenbart at det må finnes en funksjon f0êA^T slik at

(18) f0(t) = (h(w1);t);1

Fra (8) og forutsetningen om at SInd(Δ2) kan man slutte at det må finnes w2 der vi har:

(19) w2êI og

(20) w2ê Ω(X2) Ω Ω(Mg(Neg(y): yêΔ2-X2))

Fra dette følger i sin tur:

(21a) (Au)(uêX2 → w2êu) og

(21b) (Au)(uê(Δ2-X2) → w2êNeg(u))

Siden w2êI og Ekv(R2(t), I) er en partisjon av I, kan man slutte at det finnes b1 der:

(22) w2êb1 & b1 êEkv(R2(t),I)

På samme måte som i forbindelse med X1 og Δ2 kan man nå vise:

(23a) (Au)(uêX2 → b1 Inkl u)

(23b) (Au)(uê(Δ2-X2) → b1 Inkl Neg(u))

Siden w1êb1 og b1ê Ekv(R2(t),I) har man:

(24) b1 = Mg(w: wêI & <w,w2>êR2(t))

Dette impliserer:

(25) b1 = Mg(w: wêI & (h(w);t);2 = (h(w2);t);2)

Siden w2êI & têT har man h(w2);têAxB og derfor

(26) (h(w2);t);2êB

Det skulle være klart at det finnes g0êB^T slik at

(27) g0(t) = (h(w2));t êB

Siden f0êA^T og g0êB^T & têT følger fra forutsetningene i satsen at det finnes w* der man har:

(28) w*êI
(29) (h(w*);t);1 = f0(t)
(h(w*);t);2 = g0(t)

Fra (18), (27) og (29) kan vi i lys av (16) og (25) slutte at

(30) w*êc1 & w*êb1

Anta nå at uêΓ for vilkårlig u. Siden Γ Inkl Δ1 U Δ2 har vi da at enten uê(ΓΩΔ1) eller uê(ΓΩΔ2). I det første tilfellet har vi uê(ΓΩΔ1)=X1. I så fall følger ved hjelp av (14.1) at c1 Inkl u. Fra dette og (30) følger så w*êu. Tilsvarende har vi om uê(ΓΩΔ2)=X2 at b1 Inkl u i lys av (23.a). Ved hjelp av (30) følger så w*êU.

Fra dette fremgår det at

(31) (Au)(uêΓ → w*êu)

Anta nå for vilkårlig u at uê((Δ1UΔ2) -Γ). Da har vi enten (i) uê(Δ1 -Γ) eller (ii) uê(Δ2- Γ). *Tilfelle (i)*: uê(Δ1-Γ) Da har vi uê (Δ1-(Δ1ΩΓ))= (Δ1- X1). Fra dette og (14.2) følger c1 Inkl Neg(u). Men ved hjelp av (30) kan vi da slutte w*êNeg(u).
Tilfelle (ii): uê(Δ2- Γ). Da følger uê(Δ2 -(Δ2ΩΓ)) = Δ2 - X2. Fra dette og (23b) følger b1 Inkl Neg(u), herav ved hjelp av (30) at w*êNeg(u).

I begge tilfelle har vi w*êNeg(u). Det følger at vi har bevist, siden u var vilkårlig, at

(32) (Au)((Δ1UΔ2) -Γ) → w*êNeg(u)). Fra (28), (31) og (32) følger:

(Ew)(wêI & wê(Ω(Γ) Ω Ω(Mg(Neg(y): yê ((Δ1UΔ2) -Γ)))))

Men Γ var et vilkårlig et vilkårlig element som oppfylte (3). Dermed har vi bevist SInd(Δ1 U Δ2). Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Teorem 13.12 kan generaliseres betraktelig. Vi har faktisk at den følgende sats holder:

Teorem 13.13 Anta M=<I,T,Q,h> er en tilstandsstruktur der Q= AxB. Anta at

(Af)(Ag)(fêA^T & gê B^T → (Ew)(wêI &
(At)(têT → (h(w);t);1 =f(t) & (h(w);t);2 = g(t))))

Anta π;1, π;2 Inkl T Og at π;1≠ø ≠ π;2. Definer en funksjon R(π;i) (i=1,2) ved:

R(π;i) = Mg(<w,w'>: w,w'êI & (At)(têπ;i → (h(w);t);i = (h(w');t);i))

Anta for i=1,2 at Δ;i Inkl U(Ekv(R(π;i),I)) og at SInd(Δ;i) (i=1,2). Da gjelder:

SInd(Δ1 U Δ2)

Bevis: Beviset for denne satsen er punkt for punkt som for Teorem 13.12. Frem til formel (15) i det foregående bevis er det bare å la alt stå slik det står. Det eneste man behøver å gjøre er å erstatte alle forekomster av "R1(t)" med "R(π;1)". Dette må man naturligvis gjøre gjennom hele beviset. Tilsvarende må alle forekomster av av "R2(t)" erstattes med "R(π;2)" Formelen (16) må nå endres til:

(16') c1 = Mg(w: wêI & (At)(têπ;1→(h(w);t);1 = (h(w1);t);1))

ilsvarende må (17) endres til:

(17') (At)(têπ;1 → (h(w1);t);1êA) Videre må formel (18) endres til

(18') (At)(têπ;1 → f0(t) = (h(w1);t);1)

Når det så gjelder beviset fra (18) frem til (24) blir det som tidligere bortsett fra at man må, som allerede nevnt endre alle forekomster av R2(t)" til "R(π;2)". Videre må (25) endres til:

(25') b1 = Mg(w: wêI & (At)(têπ;2→(h(w);t);2 = (h(w2);t);2))

og (26) og (27) må endres til

(26') (At)(têπ;2 → (h(w2);t);2êB)

(27') (At)(têπ;2 → g0(t) = (h(w2);t);2)

(29) må også endres. Endringen blir denne:

(29) $(At)(t\hat{e}\pi;1 \rightarrow (h(w^*);t);1 = f0(t))$
$(At)(t\hat{e}\pi;2 \rightarrow (h(w^*);t);2 = g0(t))$

Resten av beviset kan beholdes uforandret. Dermed skulle vi i det vesentlige ha vist hvordan man kan konstruere et bevis for Teorem 13.13. **QED.**

§14 Avslutning

Hovedsaken i dette skrift har vært å gi et bevis for det representasjonsteoremet for tilstandsstrukturer som vi formulerte i §9. En annen viktig sak som har vært en drivkraft i dette skrift har vært forholdet mellom det vi har kalt insidenssstrukturer og tilstandsstrukturer. Begge begrepene er naturlige og gir seg nesten av seg selv, det er i dette minste mitt inntrykk, når man reflekterer over hendelsesrekker i mulige verdener og ser på hvordan disse strekker seg utover i tid. Som vi har sett kan man til enhver insidensstruktur M naturlig assosiere en tilstandsstruktur. Den insidensstrukturen M' som i sin tur er naturlig assosiert med denne tilstandsstrukturen er, som vi har sett, identisk med M. Dette holder imidlertid ikke om man starter med tilstandsstrukturer. Er M en tilstandsstruktur og M' den insisdensstrukturen som er naturlig assosiert med M, har man ingen garanti for at den tilstandsstrukturen M'' som er naturlig assosiert med M' er identisk med den man startet med, nemlig M. Men i kraft av resultatet som ble nevnt vet man at den er er ekvivalent med M. Det er derfor naturlig å spørre om hva det er som karakteriserer alle tilstandsstrukturer som er ekvivalente. Et svar gis av det representasjonsteoremet vi beviste i §9. Et annet svar er gitt ved det resulatet som sier at enhver tilstandsstruktur er ekvivalent med en som er sterkt differensiert.

Straks man betrakter et rom av mulige tilstander S og betrakter en funksjon som tilordner tidspunkter tilstander i dette tilstandsrom kan man lett se for seg en rekke forskjellige mulige prosesser. Man kan i tilknytning til en slik struktur definere overgangssannsynligheter og dermed beregne sannsynligheten for at en prosess vil utvikle seg på forskjellige måter, gitt at den initialt er i en bestemt tilstand.

Sannsynlighet har ikke spilt noen rolle i forbindelse med det begrep om tilstandsstrukturer vi har definert i dette skrift. Derimot forbinder distribusjonsfunksjonen h i en slik struktur prosesser med mulige verdener. Straks man har innført begrepet mulig verden er imidlertid dets sammenheng med utsagnsbegrepet etablert. Dermedkan vi definere forskjellige utsagnsmengder i forbindelse med tilstandsstrukturene og studere nærmere hvordan disse utsagnsmengdene er relatert til hverandre. Dette har vi i noen grad gjort i de siste paragrafene, men langt mer kan gjøres i denne forbindelse.

En ytterligere utdypning av de temaer som det er naturlig å ta opp i denne forbindelse, og dermed en videre fordypning av den generelle teori om tilstandsstrukturer, vil imidlertid sprenge rammen for dette skrift. Eventuelle i bidrag i denne retning, om det kommer noen, får utstå til senere arbeider.

Referanser

Chellas [1]	Chellas, Brian F., 1969, *The Logical Form of Imperatives*, Perry Lane Press, Standford California
Rognes [1]	Rognes, Morten Harboe, 2002, *Om forholdet mellom det mentale og det fysiske*,Upublisert manuskript.
Rognes [2]	Rognes, Morten Harboe, 2002, *Teorien TMF. Resultater. Del I*, Upublisert manuskript.
Rognes [3]	Rognes, Morten Harboe, 2002, *Teorien TMF. Resultater. Del II*, Upublisert manuskript.
Rognes [4]	Rognes, Morten Harboe, 2008, *Tilstandsstrukturer og insidens*, Upublisert manuskript.
von Wright [1]	von Wright, Georg Henrik, 1971, *Explanation and Understanding*, Routledge & Kegan Paul, London
von Wright [2]	von Wright, Georg Henrik, 1974, *Causality and Determinism*, Columbia University Press, London